



e-ISSN: 2177-8183

**PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA COMO METODOLOGIA DE  
PESQUISA E DE FORMAÇÃO**

**STUDY AND RESEARCH PATH AS RESEARCH AND TRAINING  
METHODOLOGY**

**RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN COMO METODOLOGÍA DE  
INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN**

*Saddo Ag Almouloud*

[saddoag@gmail.com](mailto:saddoag@gmail.com)

Doutor em Matemática e Aplicações  
Universidade Federal do Pará-Brasil

*José Messildo Viana Nunes*

[messildo@ufpa.br](mailto:messildo@ufpa.br)

Doutor em Educação Matemática  
Universidade Federal do Pará-Brasil

*José Carlos De Souza Pereira*

[jsouzaper@gmail.com](mailto:jsouzaper@gmail.com)

Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática  
Universidade Federal do Pará-Brasil

*Teodora Pinheiro Figueroa*

[teodora.pinheiro@gmail.com](mailto:teodora.pinheiro@gmail.com)

Doutora em Engenharia Mecânica e Pós-Doutora em Educação Matemática  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná -Brasil

## RESUMO

Este artigo de cunho teórico, tem o propósito de tecer reflexões, de forma sucinta, sobre uma parte da contribuição teórica da Didática da Matemática para a compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Focaremos, mais especificamente, o estudo de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) e Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP), desenvolvidos como metodologias no seio da Teoria Antropológica do Didático. Nossos apontamentos e reflexões têm como pano de fundo teórico essa teoria, mais especificamente os construtos de organizações praxeológicas (matemática e didática), de sistema didático, as dimensões de um problema didático etc. O estudo mostra que o PEP e PEP-FP, como referência metodológica de pesquisa e formação de professores articulado à TAD, configuram-se como um dispositivo teórico-metodológico que permite o questionamento do mundo, mais especificamente, do mundo da matemática escolar.

**PALAVRAS-CHAVE:** Percurso de Estudo e Pesquisa. Formação e Pesquisa. Praxeologias Matemáticas. Praxeologias Didáticas. Engenharia Didática.

## ABSTRACT

This theoretical article is intended to reflect briefly on a part of the theoretical contribution of Didactics of Mathematics to understand the teaching and learning processes of mathematical concepts. We will focus, more specifically, the study of Study and Research Path (SRP) and Study and Research Path for Teacher Education (SRP-TE) developed as methodologies within the Anthropological Theory of Didactics. Our notes and reflections have this theory as a theoretical background, more specifically the constructs of praxeological organizations (mathematics and didactics), the didactic system, the dimensions of a didactic problem, etc. The study shows that the SRP and SRP-TE, as a methodological reference for research and teacher training linked to TAD, are configured as a theoretical-methodological device that allow the questioning of the world, more specifically, of the world of school mathematics.

**KEYWORDS:** Study and Research Path. Training and Research. Mathematical Praxeologies. Didactic Praxeologies. Didactic Engineering.

## RESUMEN

Este artículo teórico pretende reflexionar brevemente sobre una parte del aporte teórico de la Didáctica de las Matemáticas para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos. Nos centraremos, más

específicamente, en el estudio de lo Recorrido de Estudio e Investigación (REI) y lo Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación del Profesorado (REI-FP), desarrolladas como metodologías dentro de la Teoría Antropológica de la Didáctica. Nuestras notas y reflexiones tienen como trasfondo teórico esta teoría, más concretamente los constructos de las organizaciones praxeológicas (matemáticas y didácticas), el sistema didáctico, las dimensiones de un problema didáctico, etc. El estudio muestra que el REI y el REI-FP, como referente metodológico para la investigación y la formación docente vinculadas a la TAD, se configuran como un dispositivo teórico-metodológico que permite el cuestionamiento del mundo, más específicamente, del mundo de las matemáticas escolares.

**PALABRAS-CLAVE:** Recorrido de Estudio e Investigación. Formación e Investigación. Praxeologías Matemáticas. Praxeologías Didácticas. Ingeniería Didáctica.

## INTRODUÇÃO

A formação inicial e continuada de professores tem se apresentado como um dos temas mais tratados nas pesquisas da atualidade, mais especificamente, em nosso caso, a formação de professores de Matemática, bem como as questões metodológicas concernente a essa temática. Neste sentido, são temas de investigação: Formação inicial e continuada de professores de matemática, Demandas institucionais e das universidades; Processos de ensino e de aprendizagem de alunos com deficiência e a formação de professores envolvidos nesses processos; Engenharia didática de formação voltada para a formação de professores; Engenharia Didática de Segunda Geração, Engenharia Didática dos Domínios de Experiência, Engenharia dos Percursos de Estudo Pesquisa (PEP) e Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de professores (PEP-FP). Nesse contexto, o foco deste artigo é a contribuição da Teoria Antropológica do Didático (TAD) na compreensão de processos relacionados com a formação de professores que ensinam a Matemática, mais especificamente no estudo das metodologias de PEP e PEP-FP.

Este trabalho de cunho teórico, tem o propósito de tecer reflexões, de forma sucinta, sobre uma parte da contribuição teórica da Didática da

Matemática para a compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Focaremos, mais especificamente, o estudo de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) e Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP), desenvolvidos como metodologias no seio da Teoria Antropológica do Didático. Nossos apontamentos e reflexões têm como pano de fundo teórico essa teoria, de que falaremos no próximo item.

## REFERENCIAL TEÓRICO

As reflexões tecidas neste texto apoiam-se na TAD desenvolvida por Chevallard (1999) e colaboradores, focando mais especificamente suas noções fundamentais e como pode ser um instrumento poderoso para análise, por exemplo, de práticas docentes. Discutiremos o modelo proposto, as noções de organizações praxeológicas (organizações matemática e didática), entre outros.

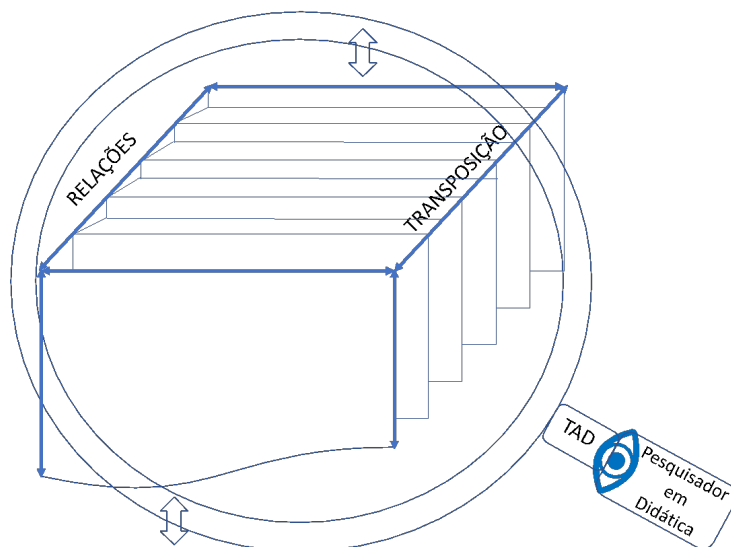
A Teoria Antropológica do Didático (TAD) estuda relações sujeito-instituição-saber, mais especificamente, permite analisar o homem frente ao saber matemático, e a situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo “antropológico” está no fato de situar a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (CHEVALLARD, p. 1, 1999).

Na perspectiva da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva), o autor considera que tudo é objeto, identificando diferentes tipos de objetos particulares: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, tomando os indivíduos como sujeitos das instituições.

O autor entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento. Em outras palavras, a existência de um objeto depende do reconhecimento e da relação de pelo menos uma pessoa ou instituição com esse objeto.

Na Figura 1, apresentamos um esquema que faz analogia aos degraus de uma escada caracterizando em cada nível (degrau) as diferentes posições que o sujeito pode ocupar nas diversas Instituições (I, I', I'',...) no decorrer de sua trajetória acadêmica e/ou profissional (Aluno – Professor- Orientador-Gestor). As setas de ida e vinda indicam que no decorrer desta trajetória podemos percorrer estes degraus, reassumindo estas posições, como por exemplo, retornando à posição de Aluno, como é o caso da formação continuada de professores. Além disso, as setas de ida e vinda no esquema (Figura 1), também indicam que a cada posição deste degrau estabelecemos relações entre os Sujeitos-Instituição-Saber em um contínuo processo de Transposição de Saberes (CHEVALLARD, 1991), o qual em uma visão ampliada (lupa apresentada no esquema) do pesquisador em Didática por intermédio da TAD, pode ser estudado ao nível das condições e restrições destas relações e, nestas relações e, também aos níveis mais altos da escala de codeterminação (CHEVALLARD, 2002a), Humanidade ↔ Civilização ↔ Sociedade. Além disso, a lupa sob o olhar da TAD revela como estas relações Sujeito-Instituição-Saber são estabelecidas, ou seja, revelam as praxeologias (tarefa-técnica-tecnologia-teoria) existente entre estas relações e, nestas relações.

Figura 1: Visão através da TAD



Fonte: Autores.

Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática, baseando-se em três postulados:

1. Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas.
2. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica reconhecida por uma instituição.

A palavra técnica é aqui utilizada como uma “maneira de fazer” uma tarefa, mas não é necessariamente como um procedimento estruturado e metódico ou algorítmico.

A delimitação de tarefas em uma prática institucional varia de acordo com o ponto de vista da instituição onde se desenvolve a prática ou de uma instituição externa que observa a atividade para descrevê-la com um objetivo preciso.

As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracterizaria um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar que não definem o conteúdo em estudo. Por outro lado, “resolver uma

equação fracionária” ou ainda “decompor uma fração racional em elementos simples” caracterizam tipos de tarefas, em que se encontram determinadas tarefas, como por exemplo, “resolver a equação” ou “decompor a fração  $7/9$  em frações mais simples” (SILVA, 2005).

Para Chevallard a necessidade de reconstrução de tarefas, enquanto construções institucionais, caracteriza um problema a ser resolvido dentro da própria instituição, que no caso da sala de aula, por exemplo, é uma questão didática.

Para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições. A maioria das tarefas institucionais torna-se rotineira quando deixam de apresentar problemas em sua realização. Isso quer dizer que para produzir técnicas é preciso que se tenha uma tarefa efetivamente problemática que estimule o desenvolvimento de pelo menos uma técnica para responder às questões colocadas pela tarefa. As técnicas assim produzidas são então organizadas para que funcionem regularmente na instituição.

Com esses dois postulados citados, obtém-se um bloco “prático-técnico” formado por um tipo de tarefas e por uma técnica que pode ser identificado em linguagem corrente como um “saber-fazer” (CHEVALLARD, 2002a, p. 3).

O autor introduz a ecologia das tarefas relacionada com as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições (3º postulado).

. Portanto,

[...] a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições e supõe-se que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada [...] essa necessidade ecológica implica na existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de tecnologia da técnica. O postulado anunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que chamamos teoria da técnica e que constitui o fundamento último. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 85-86).

Os autores apontam que a existência de uma técnica (legível e justificável) em uma instituição (que a reconhece) é uma condição mínima para permitir o seu controle e garantir a eficácia das tarefas feitas, que são geralmente tarefas que demandam a colaboração de vários atores. Essas condições e restrições ecológicas implicam então a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que Bosch e Chevallard (1991) chamam de tecnologia da técnica. Toda tecnologia precisa também de uma justificação, que denominam a teoria da técnica.

Para Chevallard (2002a) um “saber-fazer”, identificado por uma tarefa e uma técnica, não é uma entidade isolada porque toda técnica exige, em princípio, uma justificativa, isto é, um “discurso lógico” (*logos*) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia. Segundo o autor, a tecnologia vem descrever e justificar a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa.

Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefas forma uma organização “praxeológica” (ou praxeologia) pontual. A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, *práxis* e *logos*, que significam, respectivamente, prática e razão. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um *logos* que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão.

Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular, com uma certa “generalidade” que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. Para Bosch, Fonseca e Gascón (2004), a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da Organização Matemática.

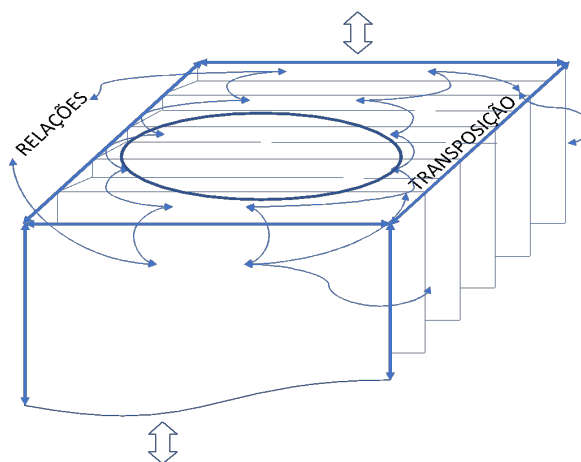
Segundo Chevallard (1999), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações



didáticas referem-se à maneira que se faz essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002a) define como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didática.

A Figura 2 mostra uma parte da ampliação, a partir da lupa da Figura 1, no que diz respeito aos Sujeitos: Aluno ↔ Professor, Instituição: Universidade ↔ Escola e as relações entre Sujeitos - Instituição – Saber em um processo de Transposição de saberes.

Figura 2: Ampliação do bloco Sujeito – Instituição - Saber



Fonte: Autores

Observamos neste esquema (Figura 2) que o cerne/razão destas relações nestas Instituições (Universidade – cursos de Licenciatura em Matemática; Escola – Sala de Aula) está nas praxeologias (ou organizações) matemáticas e didáticas. É o olhar em detalhes (lupa) para as praxeologias matemáticas e didáticas que permitirá responder respectivamente a questões do tipo: O que é instituído como objeto de ensino na Instituição I? Como os sujeitos desta Instituição I ensinam? Portanto, o papel do pesquisador em Didática é olhar a lupa através da TAD para ter uma visão ampliada no seio destas relações e de suas praxeologias. Esta visão ampliada sobre a ecologia destas praxeologias trará respostas, mas também muitas questões sobre os processos de ensino e

aprendizagem relacionados aos saberes/conhecimentos na formação de professores.

Em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem, pois, seus componentes teóricos e tecnológicos perdem seu crédito. Constantemente, em uma determinada instituição I surgem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em alguma instituição I'. A passagem da praxeologia da instituição I para a da instituição I' é chamada por Chevallard (2002a) de Transposição, mais especificamente, de Transposição Didática quando a instituição de destino é uma instituição de ensino (escola, classe etc.).

A ecologia das organizações matemáticas e didáticas é importante nas conceitualizações da TAD. Nesta perspectiva, Artaud (1997) assevera que a problemática ecológica se apresenta como um meio de questionar o real, apoiando-se nas seguintes indagações: “O que existe, e por quê? Mas também, o que não existe e por quê? Poderia existir? Sobre quais condições? Inversamente, tendo dado um conjunto de condições, quais objetos são forçados a viver, ou pelo contrário, quais são impedidos de viver nessas condições?” (ARTAUD, 1997, p. 101). Estas questões permitem englobar o domínio da realidade do pesquisador em Didática da Matemática de maneira pertinente, munindo-o “de um meio de se desprender de uma certa ilusão de transparência e de ser atento às dependências dos objetos que ele estuda” (ARTAUD, 1997, p. 101)

Vislumbramos que “objetos matemáticos e objetos didáticos vivem em associação desde que as organizações matemáticas iniciam suas vidas, para pessoas ou instituições, por um processo de estudo” (ARTAUD, 1997, p. 103). Mas, as organizações matemáticas adquiriram rapidamente uma autonomia em relação a suas condições de produção, e é justamente esta autonomia que as rende instrumentais na concretização de tarefas diferentes das quais pediam sua criação. Isto justifica, de acordo com Artaud (1997), a disjunção do estudo destes

dois tipos de objeto, ecologia dos objetos matemáticos e a ecologia dos objetos didáticos.

Os aspectos teóricos tratados até aqui são de suma importância na formação de professores. Nesse sentido, a TAD tem o propósito de formular o problema da formação de professores em termos das praxeologias a serem ensinadas, praxeologias para o ensino e praxeologias para a profissão, como proposto por Cirade (2006), na seguinte afirmação:

Quais são as questões cruciais que os professores enfrentam em sua prática docente e o que a formação pode fazer para ajudá-los a construir respostas satisfatórias – na forma de praxeis – a essas questões? Em particular, como as questões na origem das praxeologias matemáticas são geradas pelo ensino e pelas praxeologias matemáticas para o ensino? Quais são os problemas que constituem a razão de ser das praxeologias da profissão docente? (CIRADE, 2006)

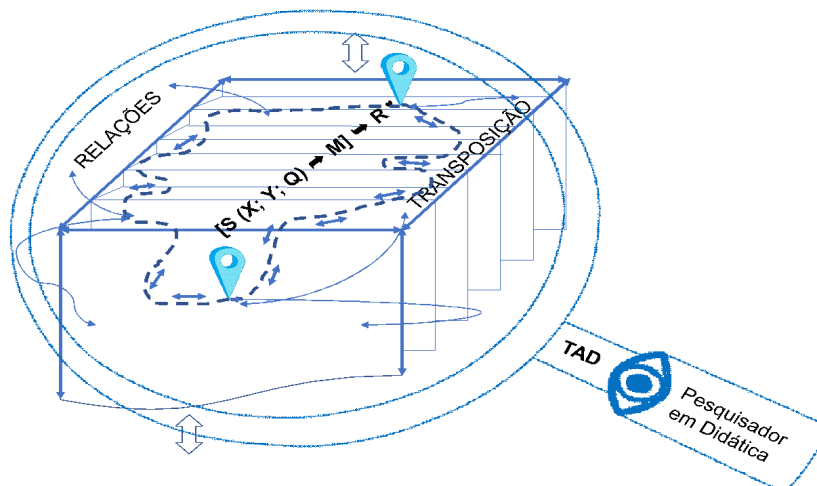
Essas inúmeras questões apresentadas por Cirade (2006) explicitam a emergência de respostas a nível de praxeologias matemáticas e didáticas. A busca por essas respostas traz à luz a necessidade de uma visão ampliada (lupa, Figura 3) sistêmica, regulada/ajustada por um dispositivo didático responsável não apenas pela direção, mas principalmente pelo sentido de um percurso de investigação.

A proposta do dispositivo didático para o ensino e aprendizagem da matemática é formulada por meio dos percursos de estudo e pesquisa (PEP), a fim de integrar a razão de ser do saber escolar no cerne do processo de estudo (CHEVALLARD, 2013), e promover o desenvolvimento das condições necessárias para tornar possível uma atividade matemática funcional, como apontado por Barquero (2009), Ruiz-Munzón (2010) e Serrano (2013). Nesta perspectiva, parece claro que uma abordagem progressiva de um novo paradigma requer a transformação das condições matemáticas de trabalho dos professores e, em particular, um repensar radical do tipo de formação necessária para o ensino da matemática.

A Figura 3 permite observar que a visão ampliada pela lupa não é o suficiente para obter respostas a nível de praxeologias a serem ensinadas,

praxeologias para o ensino e praxeologias para a profissão. Como já comentado anteriormente, diante de uma questão problemática (Q) é imprescindível um dispositivo que dará a direção e o sentido do percurso de investigação (PEP, PEP-FP). O cerne deste dispositivo (PEP/PEP-FP) é o sistema didático,  $S(X, Y, Q)$ , de forma mais específica e particular, o esquema herbatiano,  $[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R^v$ , por meio do qual a visão ampliada (lupa, Figura 3) do pesquisador em Didática sob o olhar da TAD é regulada/ajustada durante o percurso.

Figura 3: Questão problemática - PEP – PEP-FP



Fonte: Autores.

Além disso, a Figura 3 evidencia que para uma mesma Questão Problemática (Q) podem existir diferentes PEP ou PEP-FP, de acordo com a ecologia dos saberes e as diferentes relações entre Sujeito-Instituição-Saber, em cada Instituição e seus processos de transposição.

As setas de ida e vinda PEP-FP ↔ PEP revelam a correspondência entre estes percursos no que diz respeito ao impacto de um em relação ao outro nos processos de ensino e aprendizagem. E as setas de ida e vinda durante o percurso evidenciam os avanços e retrocessos a partir do milieu regulado pelo contrato didático, pelas relações entre os sujeitos e os saberes em jogo.

Assim, o dispositivo de formação de professores proposto a partir da TAD tem a estrutura do Curso de Estudo e Pesquisa para a formação de Professores (PEP-FP), um percurso que começa a partir de uma questão problemática para a profissão docente, que chamamos de  $Q_0$ -FP. O estudo desta questão será articulado em cinco módulos que constituem os componentes do PEP-FP, com as características que descrevemos mais adiante. Vale destacar que o PEP-FP tem uma estrutura muito próxima da estrutura do PEP que discutimos na próxima seção.

## **PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA – PEP**

Apresentamos nossa perspectiva teórico-metodológica baseada na TAD e na Engenharia didática do Curso de Estudo e Pesquisa proposto por Chevallard (2009a e 2009b).

Na Teoria Antropológica do Didático, Chevallard (2013) identifica o fenômeno didático do Monumentalismo dos saberes, o qual é descrito com a analogia a um museu no qual os estudantes visitam as obras as quais somente podem ser vistas e veneradas, sem tocá-las ou manipulá-las e sem questioná-las, isto sob o paradigma das visitas das obras. Como contra paradigma, o autor apresenta o paradigma do questionamento do mundo, no qual as obras podem ser visitadas e estudadas na procura de dar resposta a um questionamento inicial, neste paradigma é importante estudar as razões de ser que fizeram e fazem existir determinada obra.

Para Chevallard (2009a), toda situação didática pode ser representada por um sistema didático  $S(X; Y; \heartsuit)$  – compreenda-se que  $X$  é um conjunto que simboliza um coletivo de estudo (alunos de uma classe, equipe de pesquisadores etc.);  $Y$  simboliza a equipe (diretores de estudo: professores de matemática, orientadores de pesquisas de mestrado e doutorado etc.) que ajuda os elementos de  $X$  no estudo da obra  $\heartsuit$ . Os sistemas didáticos vão se diferenciar sob o paradigma que os envolve, porém, podem ser  $S(X; Y; O)$  – nesse sistema,

♥ = O –, se este está na perspectiva do paradigma da visita das obras ou pode ser S (X; Y; Q) – temos ♥ = Q –, se está sob o paradigma do questionamento do mundo.

O objetivo da constituição do sistema didático S (X; Y; Q) é estudar Q, ou seja, procurar uma resposta R que satisfaça certas condições a priori para iniciar o inquérito investigativo. O inquérito deve **mobilizar mais de uma ferramenta praxeológica** (várias ferramentas oriundas de vários quadros): a produção de R procede geralmente de uma heterogênese. Exceto o caso em que o inquérito é codisciplinar, pois faz “apelo” a um conjunto de ferramentas praxeológicas procedentes de várias disciplinas. Engajar-se em tal inquérito é comprometer-se num **Percorso de Estudo e de Pesquisa (PEP)** motivado pela investigação para encontrar respostas para Q.

Baseado no paradigma do questionamento do mundo, Chevallard (2001, 2009a, 2009b, 2011a e 2013) apresenta um dispositivo didático chamado de Percorso de Estudo e Pesquisa (PEP), que amplia o sistema didático para integrar o chamado esquema herbartiano<sup>1</sup>. A forma reduzida do esquema é a seguinte: S (X; Y; Q) ↪ R♥

O esquema indica que os estudantes X investigam sobre uma pergunta Q sob a direção de Y, no intuito de dar uma resposta R à Q. Isto é, uma pergunta Q é explorada e uma resposta R deve ser produzida. Esse processo é indicado pela seta ↪. O símbolo ♥ como expoente de R, representa a relatividade institucional do saber, isto é, que a resposta R é produzida sob determinadas condições e restrições próprias dessa instituição. (CHEVALLARD, 2009b).

A elaboração de R♥ a partir de Q supõe então a “fabricação”, por parte do sistema S, de um *milieu* didático M, um meio de exploração e de construção da resposta para Q. Isto é denotado como segue: [S (X; Y; Q) ↪ M] ↪ R♥ (esquema

---

<sup>1</sup> Chamado de esquema herbartiano pelo pedagogo alemão, Johann Friedrich Herbart (1776-1841) considerado o pai da pedagogia científica.

herbartiano). Esse esquema herbartiano, semidesenvolvido, indica que o sistema didático constrói e organiza ( $\rightarrow$ ) o *milieu* M com o qual produzirá uma resposta  $R^\forall$ . Para Chevallard (2009a),

M não está construído de antemão, se constrói de forma paralela à busca de respostas. A construção do *milieu* M implica ativar os gestos em cinco momentos: observar, analisar, avaliar, desenvolver, difundir e defender objetos, obras, recursos, informação etc. que possam ser incorporados, total ou parcialmente, ao *milieu* e ser parte indispensável na construção da resposta  $R^\forall$ . (CHEVALLARD, 2009a, p. 20, tradução nossa)

O *milieu* M é o conjunto de todos os recursos úteis para a construção de  $R^\forall$ . Pode ser representado como:

$$M = \{R_1^\circ, R_2^\circ, R_3^\circ, \dots, R_n^\circ, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}.$$

Assim, o esquema herbartiano desenvolvido ficaria representado como segue:  $[S(X; Y; Q) \rightarrow \{R_1^\circ, R_2^\circ, R_3^\circ, \dots, R_n^\circ, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \rightarrow R^\forall$ . O autor assevera que

Os elementos de  $R_i^\circ$  para  $i = 1, \dots, n$  são as respostas "chanceladas", "validadas" por instituições como por exemplo, o livro de classe, um site, o curso do professor, a ponte de cátedra etc. Os elementos de  $Q_j$  para  $j = n + 1, \dots, m$  são perguntas derivadas de Q, isto é, perguntas formuladas a partir da procura de dar resposta a Q. Os elementos de  $O_l$  para  $l = m + 1, \dots, p$  são obras, teorias, montagens experimentais, praxeologias que se acredita úteis para desconstruir a resposta  $R^\forall$ . (CHEVALLARD, 2009b, p. 21-23, tradução nossa)

Com a introdução do esquema herbartiano, Chevallard (2009a, 2009b) propõe que os Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) partam de uma pergunta geratriz Q, de maneira que na procura de uma resposta, leva a gerar outras perguntas derivadas de Q em função das necessidades de conhecimento gerados no estudo de Q.

No estudo da questão Q, Chevallard (2004, p. 50) define sua generalidade, "isto é, a capacidade que seu estudo tem para gerar um encontro com questões "derivadas". O que o leva a caracterizar o que é uma questão crucial: Uma questão  $Q_2$  é crucial para (ou em relação à) uma pergunta  $Q_1$  se o fato de saber responder à  $Q_2$  permite avançar na elaboração de uma resposta à

$Q_1$ . Naturalmente, para uma questão  $Q_1$  pode haver várias questões  $Q_2$ ,  $Q_2'$ ,  $Q_2''$ , etc., cruciais geradas a partir dela.

Algumas das características dos PEP são: É gerado a partir de uma pergunta  $Q$ , denotada geratriz, pois sua resposta não é imediata; para gerar a resposta à  $Q$ , é necessário formular outras perguntas derivadas de  $Q$ . A construção do *milieu* didático  $M$  é simultânea à construção de respostas. O professor não é o possuidor absoluto do saber. Para Chevallard (2012), os estudantes ampliam suas possibilidades de ação, formulando perguntas, procurando recursos e fontes de informação, constroem respostas, as avaliam e as defendem de maneira crítica a outros estudantes. O PEP é codisciplinar, para Chevallard (2009a), isto é, o aluno precisará mobilizar várias ferramentas praxeológicas de vários quadros da matemática, estabelecendo relações entre diferentes disciplinas.

Dependendo da pergunta geratriz e do gerenciamento dela, o autor indica que os PEP podem ser abertos, semiabertos e fechados (CHEVALLARD, 2017). O autor ainda afirma que

De maneira sub-reptícia, o professor pode impor um certo percurso que leva a classe a conhecer (e confrontar) as noções matemáticas escolhidas previamente pelo mesmo professor. Mais sutilmente, o professor pode ter escolhido a pergunta para investigar de tal maneira que, sob as restrições vigentes, o percurso passe quase necessariamente por esta ou aquela obra matemática. No primeiro caso, falo de um **percurso fechado**; no segundo, de um **percurso semiaberto**. Chamarei **aberto** um percurso em que o papel desempenhado pelo professor é puramente negativo, no sentido de que o professor, como "chefe de investigação", conforma-se com impor de vez em quando a decisão de não ir encontrar tal ou qual obra, que lhe parece estar ainda fora do alcance do grupo de estudantes. Só neste caso falarei de **percurso aberto**. (CHEVALLARD, 2017, p. 168-169, tradução nossa, grifo nosso).

O autor (1989, 1991 e 2009a) indica três funções didáticas ou funções de produção denotadas como **cronogênese** (avanço de estudo), **mesogênese** (evolução do *milieu*) e **topogênese** (evolução das responsabilidades entre as posições de diretores de estudos e componentes do PEP: professor e aluno/pesquisador e colaboradores de pesquisa).



O estudo de uma pergunta Q é concretizado em um PEP cuja duração pode variar. Mais amplamente, a descrição e análise de PEP (especialmente do ponto de vista triplo da topogênese, mesogênese e cronogênese) é um problema fundamental da TAD (CHEVALLARD, 2011b, p. 29, tradução nossa).

A topogênese está relacionada a posição ocupada pelo (s) diretor (es) de estudo que não é fixo, no decorrer do estudo o sistema principal pode incorporar sistemas auxiliares que leva, por exemplo, componentes de X assumirem a posição de Y como diretores de estudos pontuais no interior do PEP. A mesogênese identificada como o *milieu adidático* do PEP e a cronogênese relativa ao tempo de desenvolvimento do PEP que pode ser de semanas, meses e até um ano letivo ou mais, necessários a cumprir os estudos almejados - pode levar a caracterizar o percurso como PEP propriamente dito, micro PEP, e/ou nano PEP.

Os termos “Estudo e Pesquisa” na expressão PEP apontam para a necessidade de procurar respostas a questões cujo estudo está sob a responsabilidade dos alunos. Para reforçar essa ideia, Chevallard (2001, 2007, 2009a) define três princípios estruturantes dos PEP:

- O primeiro princípio: organizar o PEP em torno de uma questão geradora.
- O segundo princípio pede para *organizar* o PEP em torno de **cinco gestos** básicos: **observar, analisar, avaliar as respostas R<sup>o</sup>, desenvolver, em seguida, divulgar e defender a resposta R<sup>y</sup>.**
- O terceiro princípio: necessidade de uma pilotagem do PEP, *regulando [as] dez dialéticas fundamentais* que descrevemos a seguir.

### **Primeira dialética: Dialética de estudo e pesquisa**

Essa dialética se manifesta na busca permanente de respostas para as questões a serem investigadas e na formulação de novas questões. Ao se pesquisar para responder a uma pergunta, é necessário estudar e, por sua vez, o estudo gera novas questões a serem investigadas para avançar no processo de estudo. Dessa forma, as perguntas e respostas geram estudo e pesquisa de

várias praxeologias disponíveis na cultura escolar. Para esse fim, Chevallard introduziu a dialética de perguntas e respostas (Chevallard, 2013) que apresentamos a seguir. Antes de uma determinada questão ser assumida em um PEP, um conjunto de perguntas deve ser associado a outro conjunto de praxeologias que devem ser estudadas para encontrar uma resposta para a referida questão. Mas, também essa resposta deve ser analisada e avaliada de acordo com as restrições ou condições do sistema ou o domínio de interesse.

Um PEP envolve a investigação do conhecimento disponível na cultura, conhecida ou não, de trabalhos que são considerados adequados para responder à pergunta geral. Essa investigação leva ao estudo desses trabalhos considerados úteis. Por sua vez, o estudo provoca pesquisas em torno de outros trabalhos e, por sua vez, gera estudos específicos. Assim, a pesquisa abrange um contexto mais amplo e o estudo se concentra em um contexto mais específico. São considerados **gestos de estudo e pesquisa**, pesquisas em diferentes mídias, como Internet, livros didáticos, consultas com professores de diversas áreas, estudo de trabalhos presentes na instituição etc.

### **Segunda dialética: Dialética de perguntas e respostas**

Essa dialética se manifesta na formulação de perguntas e na elaboração de respostas. Esta última inclui a redação das respostas e a menção ou alusão a elas na forma oral. Os gestos da dialética das perguntas e respostas estão presentes sempre que perguntas são feitas, respostas são dadas, perguntas e respostas são destacadas na forma escrita, as respostas são mencionadas explicitamente na forma oral etc. A formulação de perguntas também produz uma mudança na evolução do *milieu*, porque o PEP se desenvolve desde que haja perguntas a serem respondidas. O *milieu* pode levar a decisão de investigar e estudar para responder a certas perguntas e descartar outras.

### **Terceira dialética: Dialética do indivíduo e do coletivo**

O PEP supõe estudar coletivamente uma questão Q e depois produzir uma resposta conjunta  $R^v$ . Uma distribuição de responsabilidades e tarefas entre os atores: professor e alunos/pesquisador e colaboradores da pesquisa, a responsabilidade não recai sobre o indivíduo, mas sobre a comunidade que prepara a resposta. Cada membro da comunidade de estudo deve se esforçar para estudar Q e produzir uma resposta  $R^v$ , um processo que é realizado mais ou menos individualmente. Em seguida, seu estudo e pesquisa contribuem para a resposta coletiva. Dessa forma, o estudo conjunto de uma pergunta problemática possibilita valorizar as respostas obtidas na comunidade de estudo em vez de aceitar as respostas impostas pela instituição escolar, como geralmente ocorre em uma aula tradicional.

O estudo coletivo não deve ser entendido como um estudo em grupo. Coletivo não é sinônimo de grupo. No primeiro caso, cada membro da comunidade de estudo pode seguir livremente seus estudos e pesquisas, e ainda contribuir para o todo, mesmo em grupos. O caso do grupo se refere à maneira de distribuição dos atores no processo de estudo e aqui a resposta obtida nem sempre surge de um consenso. As práticas a seguir são consideradas gestos da dialética do indivíduo e do coletivo:

1. **tomada de decisão** entre os membros de cada grupo para decidir como responder a uma pergunta, decisões;
2. **tomada de decisão** sobre o que e como estudar um trabalho;
3. **concordar com uma distribuição** de tarefas entre os membros de cada grupo;
4. **concordar** com toda a comunidade de estudo sobre quais perguntas derivadas serão analisadas e respondidas etc.

#### **Quarta dialética: Dialética da análise (praxeológica e didática) e síntese (praxeológica e didática)**

Toda análise praxeológica requer a apresentação de questões didáticas, tais como: de onde essa praxeologia veio? Como surgiu nesta instituição? etc.

Por outro lado, sempre que há uma análise didática, é preciso considerar como a praxeologia deve ser ensinada? Essa análise implica, por exemplo, a construção de um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) do pesquisador em uma instância anterior à implementação de um PEP ou no decorrer de um PEP. Essa dialética também implica análises praxeológica e didática contínuas desenvolvidas por toda a comunidade de estudo durante o PEP e uma síntese na fase final ou subsequente.

Uma análise praxeológica e didática a priori é frequentemente realizada pelo professor de qualquer cátedra universitária, independentemente da realização de um PEP. Caso esse PEP seja realmente realizado, além de uma análise para responder o que estudar de uma determinada praxeologia, os alunos e o professor devem preparar uma síntese que responda à pergunta: Como estudá-lo?

Essa dialética inclui práticas como:

1. analisar as questões levantadas no grupo de estudo,
2. analisar os trabalhos pertinentes para respondê-las,
3. determinar as técnicas, tecnologias e teorias presentes em uma praxeologia para construir uma resposta,
4. sintetizar o que é útil em conhecimento para responder a uma pergunta e como estudá-la etc.

#### **Quinta dialética: Dialética do tema e fora do tema (também chamada de entrada e saída do tema)**

É comum que, durante um PEP, seja necessário sair do tema ou mesmo da disciplina para procurar respostas no “sentido forte” para a questão geral e, em seguida, voltar ao tema novamente (Chevallard, 2007). A busca de respostas para a questão geratriz produz o estudo de trabalhos incorporados ao *milieu* para elaborar uma resposta, mas este estudo pode levar a “sair do tema” ou “sair da obra” para produzir um encontro com uma ou mais obras. Essas entradas e saídas incluem analisar e sintetizar quais desses trabalhos serão considerados

relevantes para construir uma resposta. “Sair do tema” não é sinônimo de mudança de disciplina ou área; uma saída pode ocorrer dentro da mesma disciplina.

### **Sexta dialética: Dialética do paraquedista e das trufas**

Esses dois termos foram usados pelo historiador francês Emmanuel Leroy-Ladurie, quando se referia aos historiadores como paraquedistas e caçadores de trufas. O primeiro termo se refere à exploração em grandes áreas do território e o segundo termo à busca de tesouros enterrados. Essas metáforas sugerem a maneira como um problema é enfrentado e resolvido em uma aula de matemática. Por um lado, o "explorador" se distancia do problema e explora o terreno de fora, mas em algum momento ele terá que inspecioná-lo para encontrar a solução.

Em um processo de estudo, é necessário inspecionar desde grandes áreas do conhecimento para finalmente encontrar esse conhecimento que é útil, pertinente para responder a um problema e, portanto, tão valioso quanto uma trufa ou pepita.

Essa dialética é totalmente contrária à ideia de imediatismo na solução de problemas e, portanto, à banalização de soluções, características de uma aula habitual de matemática, onde as respostas são imediatas, dirigidas pelo professor e facilmente esquecidas, onde o mesmo professor é aquele que atua como paraquedista e caçador de trufas.

### **Sétima dialética: Dialética de caixas pretas e caixas claras**

Essa dialética se refere à determinação de qual saber é relevante e qual não é, no momento de responder à pergunta geratriz, ou seja, encontrar um nível adequado sobre quanto e o que estudar de uma obra. Esses saberes relevantes serão "esclarecidos", enquanto outros serão deixados na "escuridão". Isso se opõe ao que acontece em uma aula regular, na qual uma clareza completa de todo o conhecimento é aspirada, tudo o que está incluído no programa de estudo é estudado, sem questionar o porquê e o para quê desse conhecimento.

**Oitava dialética: Dialética da “descrição” textual e inscrição textual (também chamada leitura e escrita)**

É o processo de evitar a transcrição formal das respostas parciais já existentes que podem levar a responder a uma determinada pergunta. Trata-se de considerar apenas a parte útil das respostas encontradas, analisando-as, avaliando-as e depois reescrevendo, desenvolvendo e interpretando essas respostas na forma de notas resumidas, glossários, conclusões finais etc.

Essa dialética é contrária ao que geralmente ocorre em um ensino tradicional, no qual o professor fornece todas as informações que os alunos devem transcrever literalmente. Além disso, em um curso de matemática e no nível universitário, a explicação do professor é transcrita sem análise ou avaliação, raramente há construção de conhecimento, os alunos transcrevem conhecimento já construído.

**Nona dialética: Dialética de conjectura e prova (também chamada de mídias e *milieux*)**

Refere-se ao saber construído em um PEP, que é considerado como o produto de uma conjectura e, como tal, deve ser testado.

Entende-se por mídia qualquer sistema que envie uma mensagem para um determinado público, como um curso para professores, um programa de televisão, um livro, um site etc.

Em um ensino que segue a pedagogia da pesquisa e do questionamento do mundo, o *meio não é conhecido de antemão*, é construído à medida que o caminho do estudo e da pesquisa é percorrido e cada uma das mídias incorporadas ao *milieu* está sujeito a testes simultaneamente com a construção de respostas. Assim, em um ensino por meio de um PEP, os alunos acessam algumas respostas já estabelecidas, dadas pela mídia que, ao entrar no *milieu* são transformadas e incorporadas a ele, no processo de preparar possíveis respostas para as perguntas (MARIETTI, 2009)

### **Decima dialética: Dialética da difusão e recepção**

Refere-se à importância de disseminar e defender a resposta obtida pela comunidade de estudo. O saber obtido nesta comunidade não é importante por si só (monumentalismo), mas porque é o produto da atividade matemática dentro dessa comunidade.

A divulgação é responsável não apenas pela explicação das respostas obtidas, mas também por causar questionamentos, aceitação ou não pelo restante da comunidade de estudo. Trata-se de uma difusão epistêmica que pode ser oral e escrita, na qual há uma justificativa para cada resposta obtida, cada trabalho utilizado, cada caminho percorrido na construção de uma resposta, que pode ser aceita ou não pelos demais membros do grupo de estudo, ou seja, a difusão epistêmica está intimamente ligada à recepção; a difusão existe se houver um receptor.

A noção PEP permite categorizar um conjunto de práticas sociais de conhecimento: **investigação científica, inquérito policial ou jornalístico** etc. O estudo escolar é, no entanto, o que parece menos pronto para uma modelagem em termos de um PEP.

Na próxima seção, tecemos algumas reflexões sobre o Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP) que tem a mesma estrutura do PEP.

### **PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES (PEP-FP)**

Pesquisas como as de Ruiz-Olarría (2015), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2015), Barquero, Florensa, Hausberger e Romo-Vázquez (2016), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2016), Licera (2017), Sierra e Gascón (2018), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2018), Benito (2019), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2019) e Florensa, Bosch e Gascón (2019) apresentam o dispositivo didático do Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores.

O percurso de estudo e pesquisa para formação de professores tem como objetivo familiarizar aos professores em formação inicial ou em formação continuada com o PEP como um dispositivo didático útil para seu desenvolvimento profissional.

O objetivo é ir preparando uma transição efetiva do paradigma monumentalista ao paradigma de questionamento do mundo, a própria formação de professores necessita de dispositivos didáticos não fundamentados unicamente no paradigma monumentalista e, por isso, se deve recorrer de alguma forma a dispositivos com estrutura do tipo PEP (Estudo de questões, mídias, *milieux*). (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 136, tradução nossa).

Para Ruiz-Olarría (2015), o PEP-FP também inicia com uma questão geratriz  $Q_0$ -FP a qual deve ser formulada para a busca de contextos ligados na formação de professores, esta deve focar um objeto de ensino a ser trabalhado considerando o nível escolar em que estes professores estão inseridos.

Todo processo de formação surge para responder a uma pergunta problemática  $Q_0$ . No caso da formação de professores, o ponto de partida é uma questão vital e crucial para a profissão de professor que chamamos de  $Q_0$ -FP. Para dar resposta a essa pergunta, o processo de formação é articulado em cinco módulos e é justamente o estudo dessa pergunta inicial que dará origem ao PEP-FP, permitindo ao mesmo tempo articular os módulos que o compõem e mostrar sua funcionalidade. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 137, tradução minha).

Como indicado por esse autor, o PEP-FP se desenvolve em 5 módulos ( $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$ ) que são articulados durante o percurso. Segundo Ruiz-Olarría (2015); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2015); Sierra e Gascón (2018); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2018); Florensa, Bosch e Gascón (2019); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2019) e Ruiz-Olarría, Bosch e Gascón (2019), os módulos do PEP-FP são:

**Módulo  $M_0$ :** *Tornar explícitas as razões de ser do PEP-FP*, esse módulo inicia-se com uma pergunta geratriz do tipo, como ensinar um conteúdo matemático específico  $C$ ? Esta pergunta é a que se pretende dar resposta, ao menos parcialmente, ao finalizar o processo de estudo.



O que é C? De onde surgiu? Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava? Por que se deve ensinar C? Quais são suas razões de ser na matemática escolar (as estabelecidas explícita ou implicitamente e as potenciais)? Quais propostas de ensino existem? O que se sabe delas? etc. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 138, tradução nossa).

O desenvolvimento desse módulo é feito mediante a procura de informação disponível como resultados de pesquisa, as diretrizes do currículo, e outras propostas inovadoras. Esse módulo é transversal aos outros módulos e vai se manter aberto durante todo o percurso, pois coleta os resultados dos outros módulos do PEP-FP.

Por exemplo, podemos assumir a questão  $Q_0$ -FP: como ensinar os quadriláteros? Que se desdobra em perguntas parciais como: Por que se deve ensinar os quadriláteros? Quais são as razões de ser dos quadriláteros na matemática escolar? Quais propostas de ensino dos quadriláteros existem? O que se sabe dos quadriláteros?

**Módulo  $M_1$ : *Viver um PEP***, neste módulo, os professores devem atuar como estudantes de um PEP que é apresentado como uma possível resposta à  $Q_0$ . Nesta perspectiva, Florensa, Bosch e Gascón (2019, p. 384, tradução nossa) afirmam que

Esse módulo tem como objetivo familiarizar aos professores com uma atividade matemática normalmente desconhecida e que pode existir até certo ponto em uma sala de aula comum. Os formadores atuam como "professores" do PEP, orientando o processo de estudo e pesquisa com um contrato didático muito mais aberto que o tradicional.

Este módulo, tem como finalidade que o professor conheça o que é um PEP e como gerenciá-lo, mas para isso deve de ter vivido um PEP na posição de estudante.

**Módulo  $M_2$ : *Analisar o PEP vivido***, depois de ter vivenciado o PEP no módulo  $M_1$ , neste módulo espera-se que o professor analise as tarefas sob uma perspectiva praxeológica, didática e ecológica, focando no problema das

condições e limitações existentes para implementar esse tipo de dispositivo de ensino nas instituições escolares.

**Módulo M<sub>3</sub>: *Desenho de um PEP***, neste módulo, o professor deve desenhar um PEP para um grupo específico de estudantes, para isto deve considerar o trabalhado nos anteriores módulos e as restrições institucionais.

Adotando um papel preliminar de designers, propõe-se adaptar e desenhar sua própria versão de atividade para um grupo específico de estudantes. Durante essa adaptação, espera-se que diferentes restrições institucionais surjam, por exemplo, rigidez curricular, distribuição de tempo, papéis tradicionais assumidos por professores e alunos, entre outros, e que sejam os próprios professores que os façam explícitos. (BARQUERO; BOSCH; ROMO-VÁZQUEZ, 2019, p. 494, tradução nossa).

Neste módulo espera-se que o professor consiga desenhar um PEP considerando o vivido, analisado e conhecido nos módulos M<sub>0</sub>, M<sub>1</sub> e M<sub>2</sub>.

**Módulo M<sub>4</sub>: *Gerenciar e experimentar um PEP***, o objetivo desse módulo é o apoio aos professores que começam no desenho e no gerenciamento dos PEP, e a coleta dos problemas, dificuldades e obstáculos que possam surgir durante a aplicação do PEP na sala de aula.

A seguir apresentamos uma relação entre o PEP e a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa para uma proposta de um PEP-FP.

## **ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA DE PESQUISA E DESENHO DO PEP**

A noção de Engenharia Didática (ED) surgiu na didática da matemática no início dos anos 80. Segundo Artigue (1988, 1995), esse termo foi denominado pela forma de trabalho no ensino comparável ao trabalho do engenheiro. A autora, argumenta que o professor concebe, executa, observa e analisa sequências de ensino para alcançar a aprendizagem de um conteúdo matemático em um grupo específico de estudantes.

A Engenharia Didática (ED) possui as seguintes fases:

**Primeira fase: *Análise preliminar***. Segundo Artigue (1995), esta análise é realizada distinguindo três dimensões: *epistêmica* (associada às

características do saber posto em jogo), *cognitiva* (associada as características cognitivas dos estudantes que estão sendo dirigidas ao ensino) e *didática* (associada às características do funcionamento do sistema de ensino). Mas a mesma autora, (Artigue, 2015) reorganiza estas dimensões e as apresenta como: Análise epistemológica, análise institucional e análise didática.

*Uma análise epistemológica* do conteúdo em jogo, incluindo frequentemente uma parte histórica. Essa análise ajuda os pesquisadores a fixar os objetivos precisos da ED e a identificar possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados. Também apoia a busca de situações matemáticas representativas do conhecimento visado, o que a teoria das situações didáticas chama de situações fundamentais. São situações problemáticas para as quais o conhecimento é necessário ou, em certo sentido, ideal. A análise epistemológica ajuda os pesquisadores a tomar a posição reflexiva e a distância necessárias em relação ao mundo educacional em que estão inseridos e a construir um ponto de referência. *Uma análise institucional* cujo objetivo é identificar as características do contexto em que a ED ocorre, as condições e restrições que enfrenta. Essas condições e restrições podem estar situadas em diferentes níveis do que é chamado de hierarquia de níveis de codeterminação (Chevallard, 2002b) na Teoria Antropológica do Didático. [...] *Uma análise didática* cujo objetivo é pesquisar o que as pesquisas têm a oferecer em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo em jogo e provavelmente orientará o design. (ARTIGUE, 2015, p. 472, tradução nossa)

Observa-se nesta citação que a autora reorganiza as dimensões da primeira fase da ED considerando aspectos propostos pela TAD.

**Segunda fase: Concepção e análise a priori.** Nesta fase se identificam as variáveis didáticas, as quais permitem controlar os comportamentos dos estudantes e seus significados. É uma fase descritiva e preditiva.

**Terceira fase: Experimentação, observação e coleta de dados.** Nesta fase, predomina a abordagem entre o professor pesquisador e a população de estudantes, sujeitos à pesquisa. Também são aplicados instrumentos projetados pelo pesquisador e são realizados registros de observação da experiência e a coleta de dados da pesquisa.

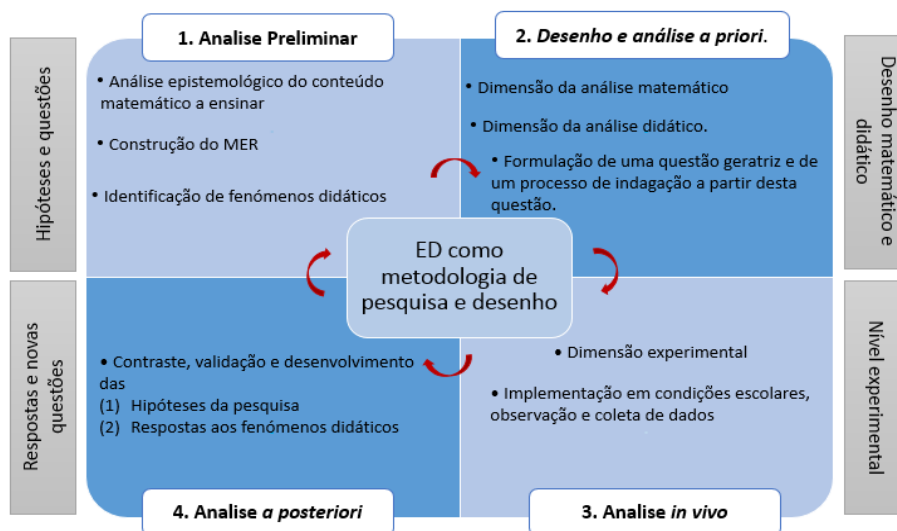
**Quarta fase: Análise a posteriori e validação.** Segundo Artigue (1995), nesta fase, é realizada a análise dos dados coletados nos diferentes momentos da experiência, assim como o confronto entre o conjunto de dados coletados na experimentação, observações da sequência de ensino e produções dos estudantes com a análises a priori.

Bosch e Barquero (2015) e García, Barquero, Florensa e Bosch (2019), levando em consideração os construtos teóricos da TAD, apresentam uma reorganização das fases da Engenharia Didática (ED), especificamente para a construção, aplicação e análise (engenharia) de um PEP (Figura 4).

Na **fase de análise preliminar**, é preciso fazer o estudo das dimensões do problema didático do objeto matemático em jogo, isto é, a dimensão epistemológica que permite construir um Modelo Epistemológico de Referência (MER), a dimensão económica e a dimensão ecológica, as quais permitem a identificação do Modelo Epistemológico de Dominante (MED).

Nesta primeira fase, o estudo epistemológico nos permite a procura das razões ou razão de ser do objeto matemático investigado, tentando responder aos seguintes questionamentos elencados abaixo.

Figura 4 - ED como metodologia de pesquisa e desenho do PEP



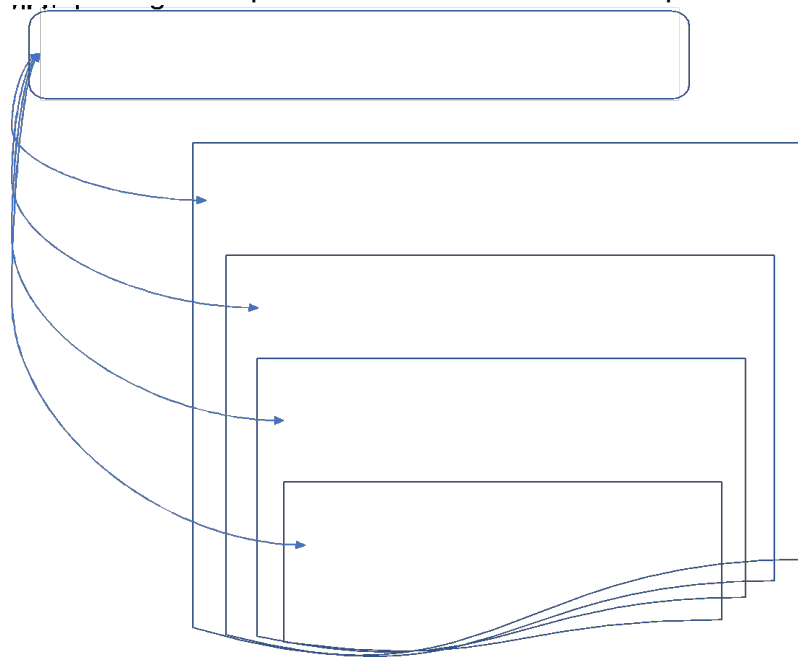
Fonte: García, Barquero, Florensa e Bosch (2019, p. 82, tradução nossa).

As respostas a esses questionamentos dão indícios para a elaboração da pergunta  $Q_0$  do PEP a ser vivido com os professores em formação inicial ou continuada.

Na fase de **desenho e análise a priori**, identificamos as questões  $Q_0$ -FP do módulo  $M_0$ , as quais são: Como ensinar o objeto matemático? Por que se

deve ensinar esse objeto matemático? E perguntas parciais como, Q<sub>0\_1</sub>-FP: O que dizem os documentos oficiais sobre esse objeto, sobre seu ensino e sua aprendizagem? Q<sub>0\_2</sub>-FP: O que dizem livros didáticos sobre esse objeto? Q<sub>0\_3</sub>-FP: Como esse objeto é ensinado? Q<sub>0\_4</sub>-FP: Quais são as razões de ser do ensino desse objeto? O que dizem a história e os cientistas sobre esse objeto? Q<sub>0\_5</sub>-FP: O que se sabe desse objeto? O que precisa saber sobre esse objeto para ensiná-los. Além disso, o desenho do PEP a ser vivido no módulo M<sub>1</sub> do PEP-FP é feito, assim como o mapa de questões e respostas preliminares. Na figura 5 mostramos um esquema para o estudo da dimensão epistemológica que envolve o problema didático em um PEP-FP.

Figura 5 - Questões para o estudo da dimensão epistemológica



Fonte: Elaborada pelos Autores

A construção da pergunta Q<sub>0</sub> do PEP a ser vivido, surge a partir do estudo epistemológico do objeto matemático em jogo, determinando a razão de ser histórica

Nesta segunda fase, Bosch e Barquero (2015) afirmam que se deve levar em conta as funções didáticas da mesogênese (evolução dos *milieux*

experimentais), cronogênese (evolução das novas questões e o conhecimento introduzido pela mídia) e topogênese (compartilhamento de responsabilidades entre professor e estudantes).

Na fase da **Análise *in vivo***, aplica-se os módulos do PEP-FP ( $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$ ) com professores ou futuros professores de matemática e que atuam em diferentes níveis do sistema educativo. A coleta de dados poderia ser feita por meio de fichas de trabalhos, gravações em vídeo e em áudio das discussões que apareçam, assim como o mapa de questões e respostas produzidos no percurso da aplicação, fóruns de discussão em ambiente de tecnológico, portfólios.

Caso seja possível a aplicação do PEP construído no módulo  $M_3$  por um professor participante da formação, deve-se apoiar, monitorar e observar as sessões da fase experimental.

Na fase da **Análise *a posteriori***, far-se-ia uma análise dos dados recolhidos durante a fase anterior (experimentação – *Análise in vivo*), a validação do desenvolvimento tanto do PEP como o PEP-FP por meio das dialéticas supracitadas. Além disso, faremos um estudo das condições e restrições dos módulos do PEP-FP por intermédio das funções didáticas da mesogênese, cronogênese e topogênese. Deve-se avaliar, também, as hipóteses das pesquisas feitas na primeira etapa da ED.

No que segue, apresentamos, de forma sintética uma pesquisa cujo foco teórico-metodológico é o PEP-FP.

### **DISPOSITIVO DE PESQUISA E FORMAÇÃO PROFISSIONAL PEP-FP/TAD: CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO DOCENTE PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA DO PONTO E DA RETA (RITA LOBO FREITAS, 2019)**

Neste exemplo, focaremos nossas reflexões sobre os modelos construídos por Freitas (2019), a partir do estudo das três dimensões de um problema didático (Gascón, 2011). As três dimensões funcionam como um fio

condutor que traz ao PEP-FP o convívio harmonioso das dialéticas (ou pelo menos parte delas) articuladas aos pressupostos da engenharia didática e fundamenta o funcionamento do dispositivo ao favorecer a produção e uso de modelos de referências, assim como no revelar de modelos dominantes no ensino e aprendizagem dos objetos enfocados no PEP.

A pesquisa desenvolvida por Freitas (2019) insere-se no campo da formação inicial de professores de matemática, especificamente na Licenciatura em Matemática brasileira, e teve por objetivo responder à seguinte questão: *Quais conhecimentos novos (ou não), em Geometria Analítica Plana (GPA) podem ser adquiridos por professores estagiários, com a ajuda de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), e quais benefícios poderão obter para projetar (conservar) esses conhecimentos no ensino médio?*

Para responder a esta questão, Freitas montou um dispositivo-metodológico-teórico PEP-FP/TAD, por meio do qual desenvolveu treze sessões<sup>2</sup> de estudo e pesquisa com estudantes (professores-estagiários) de um curso de Licenciaturas em Matemática na Bahia, participantes de turmas de estágio curricular supervisionado. O referencial teórico adotado foi a TAD, tendo Shulman (1987) como o aporte dos estudos sobre conhecimentos docentes.

Do ponto de vista dos caminhos metodológicos, a autora fez apelo ao Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP) desenvolvida por Chevallard (2009a) e colaboradores. Essa metodologia apoia-se, em primeiro lugar, no estudo das três dimensões do problema didático (Gascón, 2011) de GPA. **Trata-se das dimensões epistemológica, ecológica e econômica.** A análise das dimensões epistemológica e econômica-institucional de um problema didático tem por base o desenvolvimento histórico, permitindo identificar as diferentes formas de concepções de um determinado objeto matemático que poderão favorecer a análise didática. Ela permite, entre

---

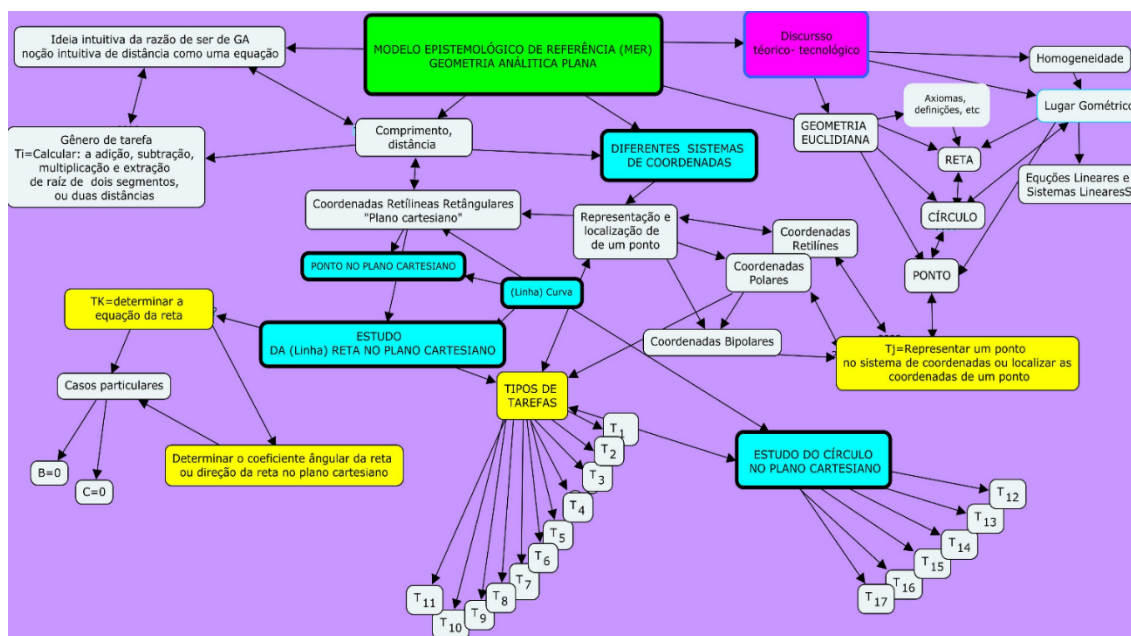
<sup>2</sup> Tendo em conta o espaço reservado a este texto, não discutiremos com profundidade todas essas sessões.



outros aspectos, identificar as razões de ser desse objeto matemático e da problemática do seu ensino.

Para o estudo desta dimensão a autora procurou respostas às seguintes questões: Quais são as razões históricas da GPA como área de conhecimentos das matemáticas? Quais são razões de ser da GPA do ponto de vista matemático? Quais objetos são estudados na GPA e quais são suas razões de ser do ponto de vista matemático? Quais objetos matemáticos alimentam a GPA e quais ela alimenta? Quais problemas podem ser estudados/analísados a partir da problemática que envolve a GPA? Quais as razões de ser dos objetos da GA e da problemática do seu ensino? As respostas construídas permitiram à Freitas (2019) construir seu modelo epistemológico de referência (MER) (Figura 6) que serviu de referência nos estudos das dimensões econômica e ecológica, assim como na construção do Modelo Praxeológico de Referência – MPR (base de sustentação do PEP-FP).

Figura 6: Ilustração do Modelo Epistemológico de Referência (MER)



Fonte: Rita Lobo Freitas, 2019, p. 161.



As siglas representadas de forma genérica por  $T_i$  ( $1 \leq i \leq 17$ ) indicam as tarefas atreladas a algumas dimensões do MER<sup>3</sup>.

A análise da dimensão econômica faz-se necessária para identificar como as praxeologias (as tarefas, as formas de resolvê-las e suas justificativas matemáticas) se comportam em uma determinada instituição (na matemática, nos PPC das Universidades, nos livros didáticos mais usados etc.). Ela apoia-se, entre outros aspectos, nas questões relativas às condições que regulam a organização e o funcionamento de tais praxeologias na instituição de referência (a universidade, por exemplo), ou seja, as questões relativas ao sistema de regras, princípios e leis (normas) que regem sua vida institucional. A dimensão econômica-institucional permeia a dimensão ecológica, uma vez que o “nascimento”, a “vida” e a possibilidade de “fenecimento” e/ou “ressurgimento” prescindem das condições econômicas. A dimensão ecológica permite, por exemplo, situar, do ponto de vista didático, os *habitats* e *nichos* do objeto matemático investigado no ecossistema do ensino considerado.

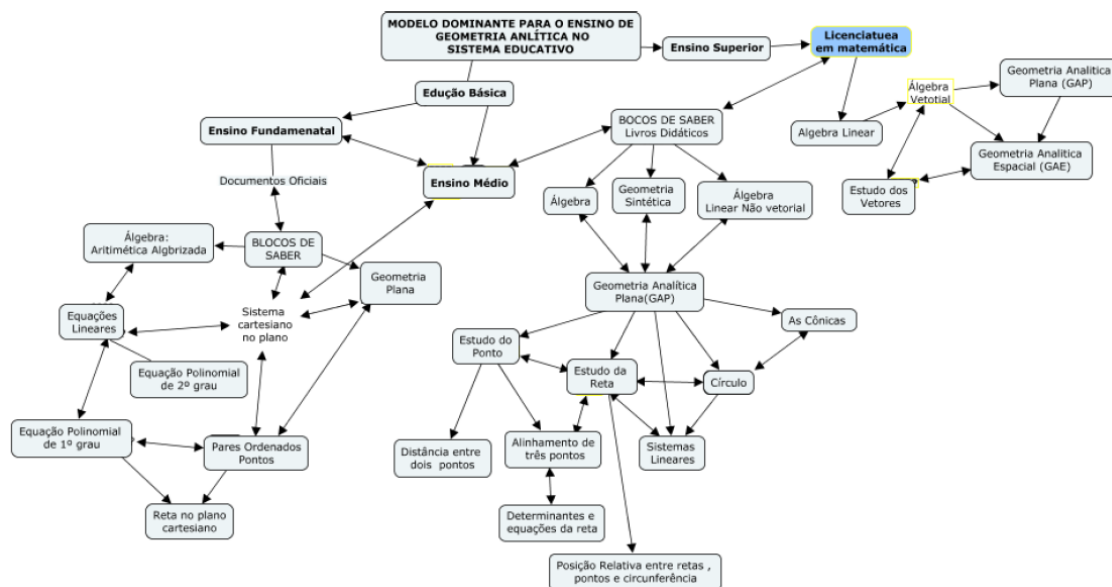
Para estudar as dimensões econômicas e ecológicas da problemática didática, Freitas (2019) usou como referência o MER construído a partir do estudo da dimensão epistemológica de seu problema didático. O estudo das dimensões econômicas e ecológicas permitiu identificar o modelo epistemológico dominante (MED) para o ensino da GPA nas diferentes instituições (ensino médio e universidade) (Figura 7)

Figura 7 - Modelo Epistemológico Dominante (MED) no sistema educativo

---

<sup>3</sup> Para mais informações consultar Freitas (2019, p. 159)

brasileiro



Fonte: Rita Lobo Freitas, 2019, p. 232

Em coerência com seu MER e o MED e, com base neles, Freitas (2019) construiu um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) (Figura 8) do que significa «ensinar e aprender» conhecimentos matemáticos do referido campo. O MPR construído serviu de apoio para o desenvolvimento da fase experimental de seu PEP-FP.

O MER construído possibilitou a reconstrução dos principais aspectos que contribuíram para a constituição do que conhecemos hoje como Geometria Analítica, especialmente a Geometria Analítica Plana. Para efeito da pesquisa de Freitas, o MER cumpriu o papel de natureza epistemológico, no âmbito da GPA, no sentido da TAD.



questionamento do mundo, mais especificamente, o mundo de uma parte da GAP (Freitas, 2019).

## CONCLUSÃO

As reflexões que desenvolvemos nas seções deste artigo mostram proposições teóricas no contexto da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e revelam elementos da metodologia do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) e Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP). Esses dois tipos de PEP engendram certa metodologia de pesquisa, que a vemos associada a Engenharia Didática (ED).

Diante das reflexões expostas destacamos a importância do papel da pesquisa e, conseqüentemente de uma visão ampliada do pesquisador em Didática por meio da TAD, no que diz respeito a trazer à luz uma análise dos fenômenos de ensino e aprendizagem no âmago da razão de ser de sua existência, a partir das praxeologias matemáticas e didáticas que vivem nas Instituições e, entre as Instituições explicitadas por intermédio das relações entre os Sujeitos-Instituição-Saber.

Pesquisar a partir da perspectiva da TAD é repleto de possibilidades de caminhos de investigação no que diz respeito a questões intrínsecas às praxeologias matemáticas propriamente ditas e, a questões intrínsecas às praxeologias didáticas, relativas à formação de professores. No bojo desta perspectiva, significamos em nossas reflexões o papel do PEP/PEP-FP como um dispositivo didático por meio do qual o pesquisador tem acesso a uma visão não apenas ampliada, mas regulada/ajustada pelos três princípios estruturantes do PEP e as dez dialéticas fundamentais.

No construto das reflexões teóricas do PEP e PEP-FP, existem etapas necessárias para que se configure a engenharia metodológica do PEP e do PEP-FP. Nesse sentido, o sistema didático  $S(X, Y, Q)$  se configura como desencadeador dessa engenharia, ou seja, a propulsão da pesquisa e do estudo parte da questão geratriz  $Q$ . Surge daí a força crucial da investigação

codisciplinar, o inquérito se instala para se buscar as respostas a partir do esquema herbartiano : [S (X; Y; Q)  $\rightarrow$  { $R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond, \dots, R_n^\diamond, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p$  }]

$\rightarrow R^\heartsuit$ . Nessa dinâmica de investigação os três princípios, os cinco gestos (**observar, analisar, avaliar as respostas  $R^\diamond$ , desenvolver, em seguida, divulgar e defender a resposta  $R^\heartsuit$** ) e as dez dialéticas fundamentais, alicerçam o desenvolvimento do PEP e do PEP-FP.

O estudo mostra que o PEP e PEP-FP, como referência metodológica de pesquisa e formação de professores articulado à TAD, configuram-se como um dispositivo teórico-metodológico que permitam o questionamento do mundo, mais especificamente, do mundo da matemática escolar.

## REFERÊNCIAS

ARTAUD, Michèle (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Actes de la IX<sup>ième</sup> École d'été de Didactique des Mathématiques. Caen: ARDM&IUFM, pp. 101-139.

ARTIGUE, Michèle (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, p. 281-308.

ARTIGUE, Michèle (1995). Ingeniería Didáctica. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: un esquema para la investigación y innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Grupo editorial Iberoamerica, Bogotá.

ARTIGUE, Michèle. (2015). Perspective on design research: The case of didactical engineering. In A. A. Bikner, K. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 467–496). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer

BARQUERO, B. (2009). Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas. (Tesis de doctorado no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

BARQUERO B., BOSCH, M. ROMO-VÁZQUEZ, A. (2015) A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In: *Proceedings of the 9th*

Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. (CERME 9).

BARQUERO B., BOSCH, M. ROMO-VÁZQUEZ, A. (2018) Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education* 50: 31.

BARQUERO B., BOSCH, M. ROMO-VÁZQUEZ, A. (2019) El uso del esquema Herbartiano para analizar um REI online para la formación del profesorado de secundaria. *Educação matemática e pesquisa*, v.21, n.4, p. 493-509.

BARQUERO, B.; FLORENSA, I; HAUSBERGER, T.; ROMO-VÁZQUEZ, A. (2016). La prise en compte du collectif dans l'analyse de deux parcours d'étude et de recherche en ligne. *Enjeux et débats en didactique des mathématiques : 18ème École d'été de Didactique des Mathématiques, La pensée sauvage*, p.457-486. (hal-01323676).

BOSCH, Marianna, CHEVALLARD, Yves (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Objet d'étude et problématique*. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, , v.19, n°1, p. 77-124.

CHEVALLARD, Yves (1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Grenoble : IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Yves. (1991) La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble (2<sup>a</sup> edición).

CHEVALLARD, Yves (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*. v. 19. n° 2, p. 221-266.

CHEVALLARD, Yves. (2001a) Les mathématiques et le monde: dépasser l'horreur ins-trumentale, *Quadrature*, núm. 41, p. 25-40.

CHEVALLARD, Yves.. (2001b) Les TPE comme problème didactique. *Comunicação ao Seminário Nacional de Didática Matemática*. Disponível em [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=14](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14).

CHEVALLARD, Yves. (2002a) Organiser l'étude. 1. Structures & Fonctions. *Actes de la 11 École d'Été de Didactique des Mathématiques*. France: La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletrônica.

CHEVALLARD, Yves. (2002b) Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (Eds.), *Actes de la*

11° École d'Été de Didactique des Mathématiques, p. 41 – 56. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée*. in

[http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers\\_une\\_didactique\\_de\\_la\\_codisciplinarite.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf)

CHEVALLARD, Yves. (2007) Passé et présent de la Théorie Anthropologique de Didactique. En A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

CHEVALLARD, Yves. (2009a) La notion de PER: problèmes et avancées. Texto de uma apresentação apresentada à IUFM de Toulouse. Disponível em [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=161](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161)

CHEVALLARD, Yves. (2009b) La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 15e école d'été de didactique des mathématiques, p. 16-23.

CHEVALLARD, Yves. (2011a) Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. Séminaire de l'ACADIS. Disponível em [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=208](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208).

CHEVALLARD, Yves. (2011b) Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD? En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G..., M. Languier (Eds), *Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico. Un panorama de la TAD, Vol 1*, pp. 23-32. Cataluña, España: Centre de Recerca Matemàtica. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/>.

CHEVALLARD, Yves. (2012) Théorie Anthropologique du Didactique, Ingénierie Didactique du Développement. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr/>

CHEVALLARD, Yves. (2013) Enseñar matemática em la Sociedad del Mañana: Alegato a favor de un contraparádigma emergente. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education*, V2, n. 2, p. 161-18.

CHEVALLARD, Yves. (2017) ¿Por qué enseñar matemáticas em secundário? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 20(1), p. 159-169.

CIRADE, G. (2006). Devenir professeur de mathématiques. Entre problèmes de la profession et formation à l'IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel. (Thèse de doctorat). Université de Provence, France.



FLORENSA, Ignasi, BOSCH, Marianna Casabó, GASCÓN, Josep (2019). Análisis a posteriori de un REI-FP como herramienta de formación del profesorado. *Educação. Matemática Pesquisa.*, São Paulo, v. 21, n. 4, pp. 382-394. In: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/42593/0>

FREITAS, Rita Lobo (2019). Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta. Tese de doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. In: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/22890>

GARCÍA, F. J.; BARQUERO, B.; FLORENSA, I.; Bosch, M. (2019) Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, p. 75-94.

GASCÓN, J. (2011) Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 14 (2), p. 203-231.

GASCÓN, J. Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría secundario II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Revista SUMA*, 45, p. 41 – 52, 2003.

MARIETTI, J. (2009). *Le concept de PER et sa réception actuelle en mathématiques et ailleurs. Une étude préparatoire* (Mémoire de Master 1). Université Aix-Marseille I, Marseille. In : [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=165](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=165)

LICERA, M. (2017) *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado*, (Tesis de doctorado no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

RUIZ-OLARRÍA, A. (2015) *La Formación Matemático-Didáctica del Profesorado de Secundario. De las Matemáticas por Enseñar a las Matemáticas para la Enseñanza*. Tesis de Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid/ES.

RUIZ-OLARRÍA, A.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2019) Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del profesorado. *Educación matemática*, v.31, n. 2.

RUIZ -MUNZÓN, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis de doctorado no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, España.



SERRANO, L. (2013). La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica (Tesis de doctorado no publica-da). IQS, Universitat Ramon Llull, España.

SHULMAN, L. (1987). Conhecimento e Ensino: Fundamentos da Nova Reforma. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-23.

SIERRA, Tomás Ángel, GASCÓN, Josep (2018). Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado y la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza. El caso de los sistemas de numeración, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 38, n° 1, pp. 79-117.

SILVA, Maria José Ferreira (2005). Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. Tese de doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.