e-ISSN: 2177-8183

O NÚMERO CROMÁTICO DE UM GRAFO E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

CHROMATIC NUMBER OF A GRAPH AND APPLICATIONS IN HIGH SCHOOL

EL NÚMERO CROMÁTICO DE UN GRAFO Y APLICACIONES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Heides Lima de Santana
heideslima@ifba.edu.br
Doutor em Matemática
Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), Campus Euclides da Cunha

Thiago Pereira Santana
thiago.santana0128@gmail.com
Graduando em Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), Campus Salvador

RESUMO

O presente trabalho trata sobre o ensino de Combinatória, de uma perspectiva conceitual e focada no Ensino Médio. Observa-se que o trabalho dos professores se restringe na maioria das vezes aos chamados “problemas de contagem”, mas essa área da Matemática se preocupa com vários outros tópicos. O objetivo do artigo consiste, então, em trazer uma visão mais abrangente da combinatória, no contexto da teoria dos grafos, e algumas aplicações do conceito de número cromático de um grafo que podem ser exploradas com os estudantes do Ensino Médio. Para isso, foram consultados artigos e livros especializados e outras fontes encontradas na internet, buscando sempre referências que dialogassem com o ensino básico. A pesquisa concluiu que as aplicações do número cromático de um grafo são bastante pertinentes para o aprimoramento do trabalho do professor que visa trazer para a sala de aula conteúdos que permitam o desenvolvimento de habilidades importantes dos alunos, como raciocínio lógico e interpretação de dados.

e-ISSN: 2177-8183

Palavras-chave: Combinatória. Matemática. Ensino médio. Teoria dos grafos. Número cromático.

ABSTRACT

This work deals with the teaching of Combinatorics, from a conceptual perspective and focused on High School. It is observed that teachers' work is mostly restricted to so-called "counting problems", but this area of Mathematics is concerned with several other topics. The objective of the article is, therefore, to bring a more comprehensive view of combinatorics, in the context of graph theory, and some applications of the concept of chromatic number of a graph which can be explored with high school students. To do this, specialized articles and books and other sources found on the internet were consulted, always looking for references that spoke to basic education. The research concluded that the applications of the chromatic number of a graph are very relevant for improving the teacher's work, which aims to bring content to the classroom that allows the development of important student skills, such as logical reasoning and data interpretation.

Keywords: Combinatorics. Mathematics. High school. Graph theory. Chromatic number.

RESUMEN

Este trabajo aborda la enseñanza de la Combinatoria, desde una perspectiva conceptual y enfocada a la Educación Secundaria. Se observa que el trabajo de los docentes se restringe mayoritariamente a los llamados "problemas de conteo", pero esta área de Matemáticas se ocupa de varios temas más. El objetivo del artículo es, por tanto, proporcionar una visión más completa de la combinatoria, en el contexto de la teoría de grafos, y algunas aplicaciones del concepto de número cromático de un grafo que pueden explorarse con estudiantes de secundaria. Para ello se consultaron artículos y libros especializados y otras fuentes encontradas en internet, buscando siempre referencias que hablaran de la educación básica. La investigación concluyó que las aplicaciones del número cromático de una gráfica son muy relevantes para mejorar el trabajo del docente, el cual tiene como objetivo llevar al aula contenidos que permitan el desarrollo de importantes habilidades de los estudiantes, como el razonamiento lógico y la interpretación de datos.

Palabras clave: Combinatoria. Matemáticas. Escuela secundaria. Teoría de grafos. Número cromático.

e-ISSN: 2177-8183

INTRODUÇÃO

A Combinatória é um amplo campo de estudos da Matemática que se dedica a uma variedade de problemas e análises: contagem dos elementos de um conjunto finito, existência de subconjuntos específicos em estruturas discretas, algoritmos etc. Entre eles, inclui-se também uma subárea denominada teoria dos grafos que, partindo de conceitos bastante elementares, mas cujos resultados possuem aplicações desde a simples recreação ou até estudos sobre a internet e o seu funcionamento, desperta o interesse da comunidade matemática há muito tempo.

Os grafos oferecem uma excelente representação geométrica para as relações entre os elementos de um conjunto qualquer (pessoas em um grupo, números em uma lista, casas em uma cidade entre outros). Em determinadas situações, pode ser interessante descobrir subconjuntos onde nenhum elemento esteja relacionado com outro do mesmo subconjunto, em situações como esta, o número cromático aparece como importante ferramenta, o qual também possui aplicações em certos problemas de otimização e jogos.

No contexto educacional brasileiro, a palavra combinatória possui um significado bem mais restrito. No Ensino Médio, por exemplo, ela é chamada de Análise Combinatória e seu foco são os métodos de contagem que permitem resolver problemas clássicos de permutação, arranjo, combinação, e assim por diante, quase nunca indo além disso. Tendo em vista tal realidade, o presente trabalho parte da seguinte questão: é possível encontrar dentro da teoria dos grafos, e especialmente no tópico do número cromático de um grafo, aplicações que possam ser apresentadas aos estudantes do Ensino Médio de maneira a ampliar e aprofundar o trabalho no ensino de Combinatória?

Sendo assim, este é um artigo teórico que foi escrito com um objetivo duplo: inicialmente, fazer uma breve análise a respeito do que caracteriza a Combinatória e qual parte dela é efetivamente trabalhada no Ensino Médio; depois, apresentar alguns tópicos introdutórios da teoria dos grafos, definição e tipos, e principalmente o conceito de número cromático de um grafo e suas aplicações que podem ser exploradas no ensino básico.

No que se refere à metodologia, a pesquisa é qualitativa (quanto à abordagem), descritiva (quanto à natureza) e bibliográfica (quanto aos procedimentos), desenvolvida com base na consulta de livros, artigos, dissertações e outras fontes, como sites e revistas especializadas. Utilizou-se principalmente os documentos oficiais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), além do livro de Morgado (1991) e outros textos encontrados na *web*, para falar sobre Combinatória e ensino de Matemática, buscando ao máximo uma visão geral acerca do tema. Para os conceitos de teoria dos grafos, a apostila que o site da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) disponibiliza, escrita por Samuel Jurkiewicz (2009), foi muito útil, além de alguns artigos e teses, embora alguns tenham sido descartados por serem muito técnicos e avançados.

O trabalho foi organizado nos seguintes tópicos: introdução; a combinatória no ensino médio; teoria dos grafos; tipos especiais de grafos; o número cromático de um grafo; aplicações do número cromático de um grafo; possibilidades para o ensino médio; conclusão.

A COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular (2017), estabelece cinco grandes unidades temáticas dentro da área de Matemática. São elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística. Ao descrever a última, o documento explica que:

e-ISSN: 2177-8183

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos (Brasil, 2017, p. 274).

Neste sentido, percebe-se que o ensino deve preparar os estudantes para lidar com os dados que aparecem constantemente no cotidiano. No estudo das probabilidades, focado nos *fenômenos aleatórios*, os alunos precisam, já no ensino fundamental, serem capazes de construir (ou calcular a quantidade de elementos) do *espaço amostral* de um experimento aleatório, isto é, do conjunto dos possíveis resultados desse experimento (como, por exemplo, o lançamento de um dado), desde que esse conjunto seja finito. Assim, "a progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem" (Brasil, 2017, p. 274).

No que diz respeito à Combinatória, por exemplo, a habilidade EM13MAT310 propõe que o aluno deve: "resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore" (Brasil, 2017, p. 546).

Existe, novamente, um interesse maior nos problemas de contagem, talvez por causa da sua relação com os problemas em que o aluno deve calcular a probabilidade de um determinado evento ocorrer. Há também uma preocupação com as aplicações desses conceitos à realidade dos alunos, considerando também o contexto em que eles vivem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) também dizem algo a respeito desse tema:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (Brasil, 1998, p. 44).

Aqui, é possível ver a possibilidade de uma abordagem interdisciplinar em que os conteúdos envolvendo contagem, probabilidade e estatística podem ser aplicados no estudo de outros fenômenos em áreas distintas do conhecimento.

Ambos os documentos BNCC (Brasil, 2017) e PCN (Brasil, 1998), ao abordar a Combinatória, o fazem quase que exclusivamente partindo de problemas em que os estudantes devem calcular a quantidade de elementos de determinados conjuntos, ou seja, aqueles que envolvem as técnicas de contagem. Para fazer isso, eles podem fazer listas, utilizar os princípios aditivo e multiplicativo, ou algum outro resultado derivado destes últimos (como as fórmulas de permutação e arranjo). Isso, todavia, transmite para os estudantes a ideia de que esse é o único tópico (ou, talvez, o único que seja relevante) que existe nessa vasta área da Matemática. Então, esse é um excelente momento para buscar analisar o que, de fato, é a Combinatória.

A Análise Combinatória, parece tratar de conceitos elementares, e não se restringe aos problemas de contagem, como indica Morgado:

> O que é Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória? A maior parte dos alunos do 2º grau responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações. Isso no entanto é uma resposta parcial pois, embora combinações, arranjos e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Analise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto, a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de

> Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de Análise Combinatória. Pelo menos uma delas, o princípio das gavetas de Dirichlet, é mais simples ou pelo menos tão simples quanto o estudo das combinações, arranjos e permutações (Morgado, 1991, p. 1).

Veja que esse comentário final é bem pertinente. De fato, o princípio da casa dos pombos (também conhecido como princípio das gavetas de Dirichlet) é mencionado na BNCC, conforme já vimos.

Mas o professor Morgado continua:

> De maneira geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são: 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas. Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução (Morgado, 1991, p. 1-2).

Nesta definição, a palavra “discreta” tem um papel importante e, por isso, trataremos melhor do seu significado.

Intuitivamente, dizer que uma estrutura ou relação é *discreta* significa que suas partes são completamente separadas e distintas umas das outras. Aristóteles, por exemplo, chama de “quantidade discreta” aquela cujas partes não possuem um “limite comum no qual possam se unir” (Aristóteles, 2020, p. 28), tal como os números naturais ou um conjunto finito de pontos no plano. Já uma reta exemplifica uma quantidade *contínua*: um ponto é uma fronteira comum no qual duas semirretas se ligam. O importante é entender que a Combinatória analisa um tipo de estrutura (e as relações que podem ocorrer dentro dela) que possui características bem definidas. Isso não significa que ela não trabalhe com conjuntos não discretos (como retas e planos), mas se ela faz isso é a partir de uma perspectiva que, sim, pode ser chamada de “discreta”.

No entanto, os problemas mais comuns no estudo da Combinatória são aqueles em que os conjuntos analisados são finitos. Dentre esses problemas, cabe destacar dois tipos importantes: os de contagem e os que envolvem provar a *existência* de determinadas estruturas.

Harris *et al.* (2008) vai além e diz que:

> Combinatória é, essencialmente, o estudo dos arranjos [ou arrumações]: emparelhamentos e agrupamentos, classificações e ordenações, seleções e alocações. Existem três principais ramos no assunto. *Combinatória enumerativa* é a ciência da contagem. Os problemas neste tópico tratam da determinação do número de arranjos de um conjunto de objetos, sob algumas restrições particulares. A *combinatória existencial* estuda problemas relativos à existência de arranjos que possuem algumas propriedades específicas. A *combinatória construtiva* é o esboço e o estudo de algoritmos para a criação de arranjos com propriedades especiais. A combinatória está intimamente relacionada com a teoria dos grafos. Muitos problemas [sobre] grafos dizem respeito ao arranjo de objetos e, assim, podem ser considerados como problemas combinatórios. Por exemplo, a teoria dos acoplamentos e a teoria de Ramsey [...] dão um gostinho da combinatória existencial [...]. Além disso, técnicas combinatórias são empregadas muitas vezes para resolver problemas em teoria dos grafos (Harris; Oliveira, 2008, p. 129-130, tradução nossa).

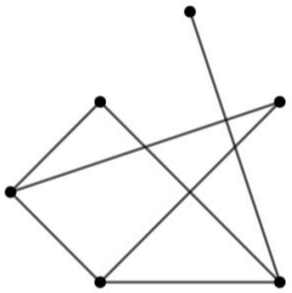
Existem, desse modo, pelo menos esses três ramos importantes em Combinatória: a combinatória enumerativa, a combinatória existencial e a combinatória construtiva. O autor também destaca a forte relação que os grafos possuem com essa área de estudos.

Fica evidente, portanto, a multiplicidade de assuntos que são estudados pela Combinatória, que se mostra um campo riquíssimo e que vai muito além dos “problemas de contagem”. A partir de agora, o artigo focará no tópico da Combinatória citado por Harris, et. al (2008): a teoria dos grafos.

TEORIA DOS GRAFOS

Um *grafo*[1] G é um par (V, E), formado por um conjunto V (ou $V(G)$) de vértices e um conjunto E (ou $E(G)$) de arestas, em que cada aresta conecta um par de vértices. Além disso, se dois vértices estão conectados por uma aresta, dizemos que eles são *adjacentes*. Grafos são representados por desenhos no plano usando pontos para os vértices e linhas para arestas, como ilustrado na Figura 1 (Morris; Oliveira, 2011).

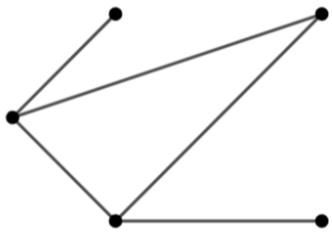
Figura 1 – Grafo com seis vértices e sete arestas



Fonte: Autoria própria

Um *subgrafo* H de um grafo G dado é um grafo tal que $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$, ou seja, cujos vértices e arestas estão contidos em G (Fig. 2).

Figura 2 - Subgrafo contido no grafo da Fig. 1



Fonte: Autoria própria

O *grau* de um vértice $v \in V$, representado por $d(v)$, é o número de arestas distintas que estão conectadas a v. O *grau mínimo* de um grafo G, representado

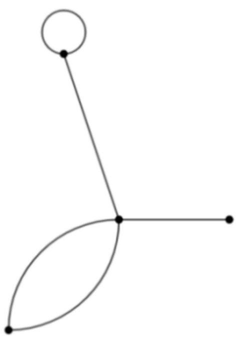
1Existem também os *hipergrafos*, em que uma única aresta pode envolver mais do que dois vértices, mas estes não serão objeto de estudo neste artigo.

por $\delta(G)$, é o menor grau de um vértice em G. Analogamente, o *grau máximo* é o maior grau de um vértice em G, representado por $\Delta(G)$. No grafo da Figura 1, tem-se $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 3$

Em qualquer grafo, a soma dos graus de todos os vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas desse grafo. Isto é, sendo m o número de arestas do grafo, tem-se: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. A demonstração deste fato pode ser encontrada em Jurkiewicz (2009). Uma consequência desse resultado elementar é que o número de vértices com grau ímpar em qualquer grafo é sempre par (por exemplo, na Fig. 1 temos quatro vértices com grau ímpar).

Neste artigo, serão tratados apenas os chamados grafos simples, em que cada aresta conecta um par de vértices distintos (evitando que se formem laços, isto é, vértices conectados a si mesmos) e onde cada par de vértice pode estar conectado por apenas uma única aresta (evitando as arestas múltiplas). Confira a Figura 3:

Figura 3 – O grafo abaixo não é simples



Fonte: Autoria própria

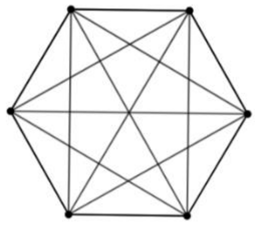
TIPOS ESPECIAIS DE GRAFOS

Abaixo, são listados alguns dos principais tipos de grafos, segundo Jurkiewicz (2009):

e-ISSN: 2177-8183

- O *grafo completo* (ou *clique*) é o grafo em que todos os pares de vértices estão conectados, denota-se por$K_n$onde né o número de vértices. Confira a Figura 4:

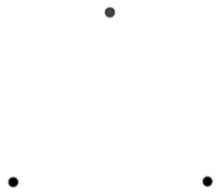
Figura 4 – Grafo completo com seis vértices (K_6)



Fonte: Autoria própria

- O *grafo nulo* é aquele em que nenhum par de vértices está ligado por uma aresta, ou seja, o conjunto E é vazio (Fig. 5).

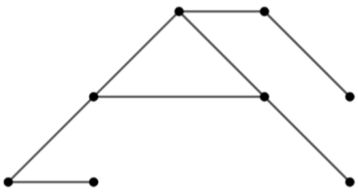
Figura 5 – Grafo nulo com três vértices



Fonte: Autoria própria

- Um grafo é dito *conexo* se, para cada par de vértices, existe um caminho conectando um ao outro (Fig. 6).

Figura 6 – Grafo conexo (ou conectado)



Fonte: Autoria própria

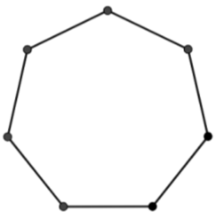
- Um *caminho*, representado por P_n, é um grafo formado por n vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ de modo que v_i está ligado por uma aresta a v_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$ (Fig. 7).

Figura 7 – Caminho com cinco vértices (P_5)

Fonte: Autoria própria

- Um *ciclo* é um grafo conexo em que todo vértice possui grau igual a 2 (Fig. 8). (Notação: C_n)

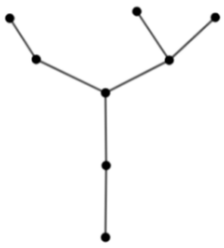
Figura 8 – Ciclo de sete vértices (C_7)



Fonte: Autoria própria

- Uma *árvore* é um grafo conexo que não contém nenhum ciclo como subgrafo (Fig. 9).

Figura 9 – Árvore com oito vértices e sete arestas

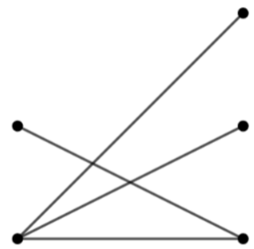


Fonte: Autoria própria

e-ISSN: 2177-8183

- Um grafo é chamado de *bipartido* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos, V_1 e V_2, de tal modo que toda aresta conecte vértices de conjuntos distintos (Fig. 10).

Figura 10 – Grafo bipartido

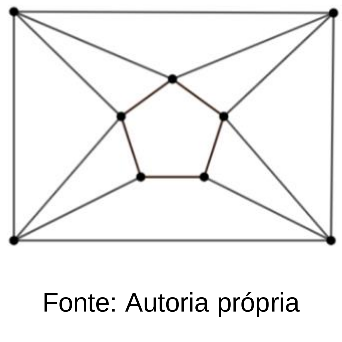


Fonte: Autoria própria

Note que grafos tipos Árvores e caminhos são também bipartidos.

- Um *grafo planar* é aquele em que pode ser desenhado num plano de modo que nenhum par de arestas se cruze (Fig. 11).

Figura 11 – Grafo planar



Fonte: Autoria própria

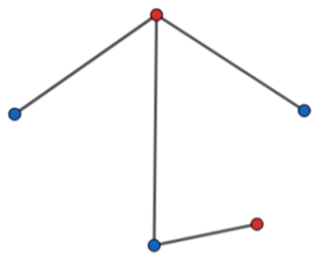
Os únicos grafos completos que também são planares são os K_n tal que $n \leq 4$.

e-ISSN: 2177-8183

O NÚMERO CROMÁTICO DE UM GRAFO

Uma *coloração* dos vértices de um grafo consiste em atribuir a cada vértice uma cor. Se dois vértices conectados por uma aresta não são pintados com a mesma cor, diz-se que se trata de uma *coloração própria*. O *número cromático* de um grafo G, denotado $\chi(G)$, é a menor quantidade de cores de que se precisa dispor para realizar uma coloração própria em G, esta definição pode ser encontrada em Jurkiewicz (2009). Como exemplo, o número cromático do grafo da Figura 12 é igual a 2.

Figura 12 – Exemplo de coloração própria



Fonte: Autoria própria

Observe que $\chi(K_n) = n$ (pois quaisquer pares de vértice estão conectados entre si), $\chi(P_n) = 2$ e $\chi(T) = 2$, para toda árvore T. Mais geralmente, qualquer grafo bipartido possui número cromático igual a 2 (basta colorir os vértices de V_1 com uma cor e os de V_2 com outra; cf. a definição de grafo bipartido apresentada acima). No caso dos ciclos, vale o seguinte:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, se n é par \\ 3, se n é ímpar \end{cases}$$

Apesar da simplicidade da definição, no caso geral o número cromático é muito difícil de ser encontrado, não existindo um algoritmo[2] que possibilite

2Isto é, um conjunto de regras que podem ser executadas para resolver um determinado problema.

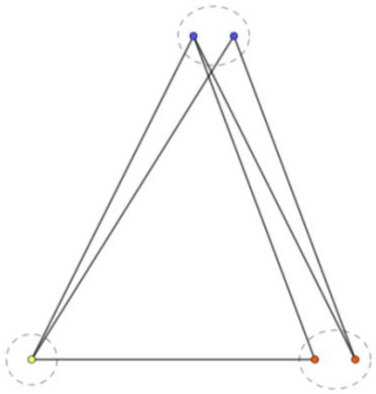
e-ISSN: 2177-8183

identificá-lo num grafo qualquer. Em alguns casos, calcular o número cromático pode inclusive envolver o uso de técnicas muito avançadas da Matemática, como no caso de uma família de grafos conhecida como grafos de Kneser (MORRIS & OLIVEIRA, 2011). No entanto, existem alguns resultados que estabelecem certos limitantes elementares para o número cromático. Dado um grafo G, temos sempre $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, onde $\Delta(G)$ é o já definido grau máximo de G. Note que, no caso do grafo completo, o número cromático é exatamente igual a esse máximo, ou seja, $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$, pois quaisquer pares de vértices em K_n estão ligados por uma aresta.

Denotando por $\omega(G)$ o número de vértices do maior grafo completo que está contido em G, tem-se $\omega(G) \leq \chi(G)$. De fato, não seria possível colorir este subgrafo de G e, consequentemente, o próprio G com menos do que $\omega(G)$ cores.

Quando colorimos propriamente os vértices de um grafo, estamos na verdade construindo os chamados *conjuntos independentes*, ou seja, conjuntos de vértices sem nenhuma aresta conectando quaisquer dois deles. Basicamente o que ocorre é que todos os vértices coloridos com uma mesma cor formam um conjunto independente (Fig. 13).

Figura 13 – Grafo com número cromático igual a 3, com vértices separados em conjuntos independentes



Fonte: Autoria própria

Apesar de toda a abstração presente no conceito de número cromático, ele possui aplicações práticas importantes, algumas das quais serão apresentadas no que se segue.

APLICAÇÕES DO NÚMERO CROMÁTICO DE UM GRAFO

Os grafos podem ser utilizados numa quantidade enorme de situações, dado que sua definição é a de um conjunto de vértices e arestas. Por exemplo, numa sala de aula, cada aluno pode ser representado por um vértice e, sempre que tivermos dois amigos, podemos ligar os vértices correspondentes por uma aresta.

Os grafos, em algumas situações, podem ser usados para representar pessoas, objetos, marcas de produtos, retas no plano etc. Enfim, qualquer conjunto pode ter seus elementos representados com grafos. Desse modo, simplificam situações que podem ter diferentes graus de complexidade.

Além disso, grafos possuem uma ligação natural com o conceito de *relação*. Podemos citar como exemplos as seguintes relações: “ser amigo de”, “ser disjunto de”, “fazer fronteira com”, “ser filho de” etc. As arestas de um grafo estabelecem relações que vão depender do que os vértices representam. Assim, não faz sentido que um grafo cujos vértices simbolizam os objetos de uma casa tenha como relação definidora de suas arestas a frase “ser casado com”, pois nesse caso não existe uma conexão possível entre os objetos e a relação.

Nesse contexto, as aplicações dessas estruturas simples abrangem um vasto horizonte. Entre elas, destacam-se aquelas que incorporam algum tipo de coloração (conforme a definição anterior). Na verdade, isso não quer dizer que é preciso pintar os vértices, pois é suficiente atribuir números ou outros símbolos a cada vértice. Tanto na Matemática quanto na Física, é comum utilizar palavras do cotidiano para expressar conceitos que podem se diferenciar do entendimento convencional, destacando a importância de manter uma atenção cuidadosa. Mas, tratando especificamente do número cromático de um grafo, é possível destacar algumas aplicações interessantes:

I) *Coloração de mapas*

Um mapa, entendido como um conjunto de regiões fechadas no plano que podem ou não fazerem fronteiras umas com as outras, como o mapa dos países do mundo, dos estados de um país etc. pode ser representado por um grafo cujos vértices simbolizam as regiões e as arestas, a relação “faz fronteira com”: assim, duas regiões estão conectadas no grafo se, e somente se, possuem uma fronteira comum. Tal grafo é do tipo planar e o seu número cromático possui um limitante curioso.

De fato, se G é um grafo planar qualquer, tem-se $\chi(G) \leq 4$. Este resultado é conhecido como o Teorema das Quatro Cores, e sua demonstração só foi possível com o auxílio de computadores. Um resultado mais simples de ser provado, todavia, estabelece que $\chi(G) \leq 5$, para G planar (Jurkiewicz, 2009). Isso implica que todo mapa pode ser colorido com no máximo quatro cores, apresentando um desafio interessante na busca por uma coloração com esse número reduzido de cores (ou até menos) para determinados mapas (Fig. 14).

Figura 14 - Mapa da região nordeste, que pode ser colorido com no máximo quatro cores

Fonte: Dante (2016, p. 171)

II) *Organização dos horários*

Para explicar esta aplicação, inspirada em um exemplo citado por Jurkiewicz (2009), é necessário utilizar uma situação imaginária: suponha que os estudantes de uma determinada escola pretendam organizar algumas sessões de cinema no fim de semana, em que serão exibidos cinco filmes distintos (A, B, C, D, E). Eles dispõem de mais de uma sala e, assim, é possível exibir dois ou mais filmes no mesmo horário. Cada filme possui um ingresso próprio e, para simplificar, suponha que apenas treze alunos compraram ingressos (alguns mais do que um), de acordo com Tabela 1:

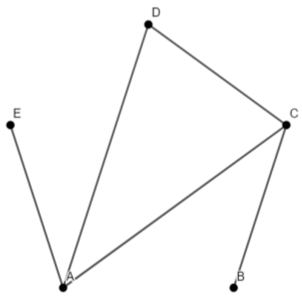
Tabela 1 – Alunos (numerados de 1 a 13) que vão assistir a cada um dos filmes

Filmes	Alunos que vão assistir
A	2, 8, 10, 12, 13
B	3, 5, 6, 9
C	5, 9, 11, 13
D	4, 8, 13
E	1, 2, 7, 10

Fonte: Autoria própria

É possível construir um grafo (Fig. 15) onde cada vértice representa um filme e cada aresta conecta dois deles se, e somente se, pelo menos um aluno comprou ingresso para assistir a ambos.

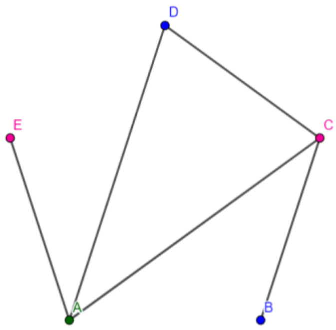
Figura 15 – Este grafo simplifica as informações da tabela



Fonte: Autoria própria

A partir deste grafo, os organizadores podem se perguntar sobre qual é a menor quantidade de horários que eles precisam dispor de modo que todo mundo consiga assistir aos filmes que escolheu. Se for escolhida uma cor para cada horário, isso significa que dois vértices adjacentes não podem ter a mesma cor e o menor número de cores necessário é, por definição, o número cromático do grafo. No exemplo, tal número é igual a 3, ou seja, é possível em apenas três horários distintos exibir todos os filmes (Fig. 16).

Figura 16 – O número cromático é igual a 3



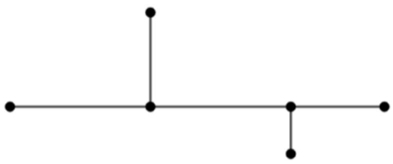
Fonte: Autoria própria

III) *Jogos de coloração*

Dado um grafo qualquer G com número cromático $\chi(G)$, é possível estabelecer um jogo com dois integrantes (Alice e Bob, por exemplo), no qual são entregues n cores, $n \geq \chi(G)$, para cada um deles. Alternadamente, eles devem colorir propriamente os vértices do grafo, mas com objetivos diferentes: Alice deseja concluir a coloração própria em todo o grafo, enquanto Bob deseja impedir isso (Furtado, 2017).

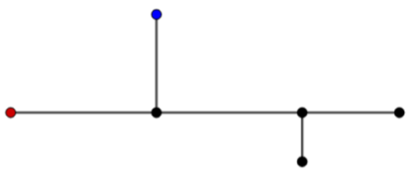
Como exemplo, se G é a árvore abaixo (Fig. 17) e $n = 2$ (azul e vermelho). Nesse caso, supondo que Alice comece o jogo é sempre possível para Bob impedir uma coloração própria de todo o grafo:

Figura 17 – Árvore para o jogo de coloração



Fonte: Autoria própria

Figura 18 – Jogadas de Alice (azul) e Bob (vermelho)



Fonte: Autoria própria

Se Alice pinta o vértice superior com a cor azul, Bob pode pintar o vértice mais à esquerda com vermelho, impedindo que o vértice adjacente a ambos seja colorido com qualquer uma das cores, o que termina o jogo com a vitória de Bob (Fig. 18). Em qualquer um dos vértices, os quais Alice pode escolher inicialmente, verifica-se a mesma conclusão. Portanto, neste caso, Bob sempre tem uma estratégia vencedora, contudo isso nem sempre se verifica e pode acontecer de Alice também possuir uma estratégia infalível a depender do grafo e do número de cores dadas.

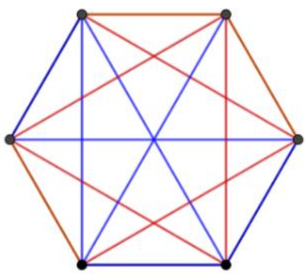
Por exemplo, no grafo anterior, se $n = 3$, então basta Alice colorir inicialmente um vértice de grau 3 para garantir a vitória. Jogos desse tipo são analisados na tese de doutorado de Furtado (2017) e contribuem para um entendimento mais profundo a respeito de colorações próprias de um grafo.

IV) *Coloração de arestas*

e-ISSN: 2177-8183

Relacionado a números cromáticos, pode-se trabalhar coloração das arestas em vez do vértices, isto é, pode-se colorir as arestas de um grafo e, neste caso, estabeleceremos diferenças entre as relações que definem as arestas. Vejamos um exemplo: numa festa há um grupo de seis pessoas tais que quaisquer duas delas ou se conhecem mutuamente ou não se conhecem mutuamente. Representar através de grafo: os vértices são as pessoas e as arestas são as relações “conhecer” ou “não conhecer”. No primeiro caso, elas serão coloridas com azul; no segundo, com vermelho. Note que neste caso, um possível grafo colorido é apresentado na Figura 19.

Figura 19 - Grafo com seis vértices representando seis pessoas numa festa e as relações “conhecer” (azul) e “não conhecer” (vermelho).



Fonte: Autoria própria

POSSIBILIDADES PARA O ENSINO MÉDIO

O epistemólogo, psicólogo e biólogo suíço, Jean Piaget (1896-1980), diz que “o ensino das matemáticas convida [...] as pessoas a uma reflexão sobre as estruturas, por meio de uma linguagem técnica que comporta um simbolismo muito particular, e exige um grau mais ou menos alto de abstração” (Munari, 2010, p. 84). Nesse sentido, os grafos permitem representar situações complexas usando vértices e arestas e abrem espaço para um trabalho rico e divertido que pode, sim, ser explorado com alunos do Ensino Médio.

Conforme foi discutido no início deste trabalho, a Combinatória nesta etapa de ensino é restrita a um tipo muito específico de problemas, um fato que em si não tem nada de errado, uma vez que os professores de matemática precisam trabalhar uma quantidade já bem extensa de conteúdos. Desse modo, qual o sentido de querer incorporar novos temas a essa estrutura estabelecida? Conteúdo por conteúdo, não seria melhor continuar limitado por aqueles que são documentalmente obrigatórios? A resposta é sim, desde que o objetivo seja simplesmente este: o de ficar limitado por uma estrutura preestabelecida.

Entretanto, se for um desejo do docente que seus alunos sejam capazes de desenvolver competências e habilidades importantes, como a capacidade de interpretar certos aspectos da realidade a partir dos conhecimentos adquiridos, então nada mais natural do que a busca por novos meios para tornar isto possível, além de um trabalho mais sólido com aquilo que já constitui o currículo escolar. É nesse sentido que o presente artigo apresenta a teoria dos grafos como uma possibilidade de ampliação e aprofundamento do estudo da Combinatória, até mesmo em nível conceitual.

Tudo o que foi apresentado acima (definição e tipos de grafos, coloração e número cromático) possui caráter elementar e pode aparecer no Ensino Médio. Contudo, se o professor pretender realmente trabalhar com esse tema, uma observação é importante: os estudantes podem, erroneamente, considerar relevantes os aspectos geométricos dos grafos (sua forma no plano), quando na verdade o que importa[3] são as relações dos elementos de um conjunto que aprecem representadas no desenho. Assim, é necessário diferenciar a geometria da teoria dos grafos.

Quanto às aplicações do número cromático que foram citadas, nota-se que elas apontam para duas direções: uma de caráter prático e a outra mais voltada para o lúdico. Ambas, todavia, não são contraditórias ou irreconciliáveis, mas complementares, importantes para a formação do estudante. Piaget diz que

3 Uma exceção são os grafos planares.

“a criança que joga desenvolve suas percepções, sua inteligência, suas tendências à experimentação, seus instintos sociais etc.” (Munari, 2010, p. 99). Isso se aplica também aos alunos mais velhos.

Os jogos de coloração exigem um nível alto de raciocínio lógico e criatividade e é fundamental que os jogadores consigam identificar por si mesmos se existe alguma estratégia que garanta a sua vitória. No que diz respeito às aplicações do número cromático em situações cotidianas, elas são bastante extensas e envolvem outros temas além da organização de horários, como alocação de serviços, organização de produtos, organização de trânsito etc. Elas auxiliam na percepção de como as ideias abstratas da Matemática aparecem disfarçadamente em momentos tão corriqueiros.

Com isso, pretende-se convencer os professores a respeito das oportunidades que a abordagem de um conteúdo fora do programa oficial, como os grafos, traz consigo para a sala de aula, e abre espaço para um ensino mais dinâmico e abrangente. Para os interessados em aprofundar no estudo da teoria dos grafos, os sites da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI) do Instituto Brasileiro de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) disponibilizam textos sobre esse assunto que podem ajudar bastante na aquisição de boas referências (além daquelas que aparecem no final deste trabalho).

CONCLUSÃO

Neste trabalho, discutiu-se sobre a Combinatória no Ensino Médio, partindo de uma análise a respeito do que caracteriza esta área da Matemática. Percebe-se que se trata de um campo de amplitude muito maior do que aquilo que normalmente é visto nas escolas de nível básico. Na verdade, pode-se dizer que mesmo situações corriqueiras, ligadas a relações entre os elementos de um conjunto finito, são deixadas de lado no currículo escolar.

Essa lacuna nos permitiu realizar uma análise mais aprofundada e, em seguida, apresentar conceitos fundamentais da teoria dos grafos, um ramo da Combinatória que lida com estruturas compostas por conjuntos de vértices e arestas, conhecidas como grafos. Esta área da Matemática não apenas possui aplicações práticas em jogos, otimização e computação, mas também carrega uma considerável importância teórica.

Um tema de grande relevância na teoria dos grafos diz respeito aos problemas de coloração de vértices ou arestas em um grafo. Como previamente abordado, a coloração de vértices envolve a atribuição de uma cor a cada vértice do grafo. O número cromático, por sua vez, representa a menor quantidade de cores necessárias para colorir os vértices de forma que cada aresta conecte dois vértices de cores diferentes. Esse conceito não apenas possui aplicações significativas, é marcado por uma beleza intrínseca que o torna particularmente adequado para exploração em sala de aula.

Desse modo, foram analisados algumas dessas aplicações: a coloração de mapas, a organização de horários a partir de uma tabela, os jogos de coloração e a coloração de arestas (como adendo). Foi verificado que o professor do Ensino Médio pode trabalhar essa temática nas suas aulas e, desse modo, estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade dos estudantes, ampliando os horizontes da percepção educativa nesta área. Além disso, trata-se de uma oportunidade para o aprimoramento de habilidades como a interpretação de dados e o pensamento simbólico e abstrato.

Portanto, o desenvolvimento desta pesquisa demonstrou um considerável potencial para estimular o aprendizado dos estudantes, não apenas em relação ao objeto matemático em foco, mas também em relação a outros conteúdos do Ensino Médio, proporcionando um enriquecimento significativo das competências e habilidades dos alunos.

e-ISSN: 2177-8183

Por fim, e como lembrete final, este trabalho busca contribuir com uma proposta de conteúdo cujo objetivo é repensar o ensino da Combinatória. Reconhecemos que essa proposta pode ser continuamente aprimorada.

REFERÊNCIAS

ARISTÓTELES. Categorias. Tradução de Edson Bini. 2ª ed. São Paulo: **Edipro**, 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em 05 de junho de 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 05 de junho de 2023.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações: ensino médio.** 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016.

FURTADO, A. L. C. **Jogos Combinatórios em Grafos: Jogo Timber e Jogo de Coloração**. Tese (Doutorado) - Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, UFRJ, Rio de Janeiro, 2017.

HARRIS, John; HIRST, Jeffry L.; MOSSINGHOFF, Michael. **Combinatorics and Graph Theory**. New York: Springer-Verlag, 2008.

JURKIEWICZ, Samuel (2009). **Grafos – uma introdução** [Apostila utilizada no Programa de Iniciação Científica (PIC) da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)]. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf. Acesso em: 13 set. 2022.

MORGADO, Augusto César de Oliveira *et al*. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: **Sociedade Brasileira de Matemática**, 1991.

MORRIS, Rob; OLIVEIRA, Roberto Imbuzeiro. Extremal and Probabilistic Combinatorics. **In: 28° Colóquio Brasileiro de Matemática**, 2011.

MUNARI, Alberto. **Jean Piaget.** Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.